

XIV - Nombres complexes

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

I - L'ensemble des nombres complexes

I.1 - Définition et Opérations

Définition 1 - Nombre complexe

On admet l'existence d'un ensemble noté \mathbb{C} , appelé ensemble des *nombres complexes*, muni d'une addition et d'une multiplication, tel que :

- \mathbb{C} contient un nombre noté i tel que $i^2 = -1$.
- pour tout élément $z \in \mathbb{C}$, il existe un unique couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $z = a + bi$. Cette écriture est la *forme algébrique* de z .
 - ★ Le réel a est la *partie réelle* de z , noté $a = \Re(z)$.
 - ★ Le réel b est la *partie imaginaire* de z , noté $b = \Im(z)$.

Deux nombres complexes $z_1 = a + bi$ et $z_2 = \alpha + \beta i$ sont égaux si et seulement si $(a = \alpha$ et $b = \beta)$.

Exemple 1 - Quelques nombres complexes

Le réel $12 = 12 + 0i$ est un nombre complexe.
Les nombres $3 + 2i$ ou $\sqrt{3} + \sqrt{2}i$ sont des nombres complexes.

Définition 2 - Affixe, Image

Soit M un point du plan de coordonnées (a, b) . L'*affixe* du point M est le nombre complexe $a + bi$.

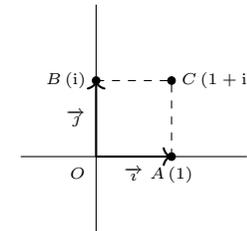
Soit $z = x + yi$ un nombre complexe sous forme algébrique. Le point de coordonnées (x, y) est l'*image* du nombre complexe z .

Soit \vec{u} un vecteur du plan de coordonnées (x, y) . L'*affixe* du

vecteur \vec{u} est le nombre complexe $x + yi$.

Exemple 2 - Le plan complexe

Soient $a = 1$, $b = i$ et $c = 1 + i$. On note A (resp. B , C) l'image de a (resp. b , c). Alors,



Définition 3 - Opérations sur les nombres complexes

Soient $z_1 = a + bi$, $z_2 = \alpha + \beta i$ deux nombres complexes sous forme algébrique et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- **Addition.** $z_1 + z_2 = (a + \alpha) + (b + \beta)i$.
- **Multiplication.** $z_1 z_2 = (a\alpha - b\beta) + (a\beta + b\alpha)i$.
- **Inverse.** Si $z_1 \neq 0$, alors $\frac{1}{z_1} = \frac{a-bi}{a^2+b^2}$.

Exemple 3 - Opérations

En utilisant les définitions précédentes,

$$\begin{aligned}(1 + 2i) + 4(-1 + 3i) &= (1 + 2i) + (-4 + 12i) \\ &= (1 - 4) + (2 + 12)i \\ &= -3 + 14i.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(1+i)(3-2i) &= 3-2i+3i+i(-2i) \\ &= (3+2) + (3-2)i \\ &= 5+i.\end{aligned}$$

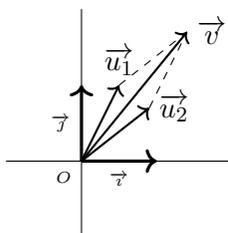
$$\begin{aligned}\frac{1+i}{2-3i} &= (1+i) \frac{2+3i}{4+9} \\ &= \frac{2+3i+2i+3i^2}{13} \\ &= \frac{-1+5i}{13}.\end{aligned}$$

Proposition 1 - Interprétation géométrique

Soient \vec{u} , \vec{v} deux vecteurs du plan d'affixes respectifs u , v . Pour tous λ , μ réels, le vecteur $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ a pour affixe $\lambda u + \mu v$.

Addition de vecteurs

Soient \vec{u}_1 un vecteur d'affixe z_1 et \vec{u}_2 un vecteur d'affixe z_2 . Alors, $z_1 + z_2$ a pour image le vecteur $\vec{v} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$:



Théorème 1 - Propriétés des opérations

Soient $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$.

- **Propriétés de l'addition.**

- ★ Associativité : $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$.

- ★ Commutativité : $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$.

- ★ Élément neutre : $z_1 + 0 = z_1$.

- ★ Opposé : $z_1 + (-z_1) = 0$.

- **Propriétés de la multiplication.**

- ★ Associativité : $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$.

- ★ Commutativité : $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$.

- ★ Élément neutre : $z_1 \cdot 1 = z_1$.

- ★ Inverse : Si $z_1 \neq 0$, alors $z_1 \cdot \frac{1}{z_1} = 1$.

- **Distributivité** : $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = (z_1 \cdot z_2) + (z_1 \cdot z_3)$.

Exemple 4 - Identité remarquable

En utilisant les propriétés précédentes,

$$\begin{aligned}(2+3i)^2 &= 2^2 + 2 \times 2 \times 3i + (3i)^2 \\ &= 4 + 12i - 9 \\ &= -5 + 12i.\end{aligned}$$

Plus généralement, si z_1, z_2 sont des nombres complexes et n est un entier naturel, on peut montrer la formule du binôme de Newton :

$$(z_1 + z_2)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z_1^k z_2^{n-k}.$$

I.2 - Équations du second degré

Proposition 2 - Trinômes

Soient a, b, c trois réels tels que $a \neq 0$. L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet toujours des solutions sur \mathbb{C} . Posons $\Delta = b^2 - 4ac$ le *discriminant* de cette équation.

- Si $\Delta = 0$, l'équation possède une unique solution $x_0 = -\frac{b}{2a}$.

- Si $\Delta > 0$, l'équation possède deux solutions

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

- Si $\Delta < 0$, l'équation possède deux solutions

$$x_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

Exemple 5 - Résolution d'équation

Soit z une solution de $z^2 + 3z + 4 = 0$. Le discriminant de ce trinôme vaut $\Delta = 3^2 - 4 \times 4 = -7$. Ainsi,

$$z \in \left\{ \frac{-3 - i\sqrt{7}}{2}, \frac{-3 + i\sqrt{7}}{2} \right\}.$$

Proposition 3 - Relations coefficients / racines

Soit z_1, z_2 les solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$. Alors,

$$z_1 z_2 = \frac{c}{a} \text{ et } z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}.$$

I.3 - Conjugaison

Définition 4 - Conjugué

Soient a, b deux réels et $z = a + bi \in \mathbb{C}$. Le nombre complexe $\bar{z} = a - bi$ est le *conjugué* de z .

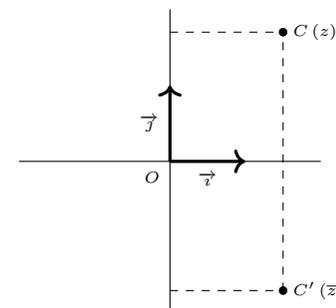
Exemple 6 - Conjugués

$$\bar{i} = -i, \bar{2} = 2, \overline{\sqrt{3} + 2i} = \sqrt{3} - 2i.$$

Proposition 4 - Interprétation géométrique

Soit M un point du plan d'affixe z . Le point d'affixe \bar{z} est le symétrique de M par rapport à l'axe des abscisses.

Conjugués



Proposition 5 - Propriétés du conjugué

Soit z un nombre complexe.

- $\overline{\bar{z}} = z$.
- $\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$, $\operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$.
- z est réel si et seulement si $z = \bar{z}$.
- z est imaginaire pur si et seulement si $z = -\bar{z}$.
- $z\bar{z} \in \mathbb{R}_+$. De plus, $z\bar{z} = 0$ si et seulement si $z = 0$.

Proposition 6 - Conjugué et Opérations

Soient z_1, z_2 deux nombres complexes.

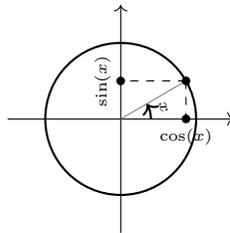
- $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$.
- $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$.

II - Cercle trigonométrique

II.1 - Cosinus et Sinus

Pour tout x réel, on lit les valeurs de ses sinus et cosinus sur le *cercle trigonométrique*.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

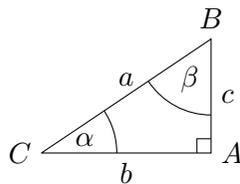


Proposition 7 - Théorème de Thales

Soit ABC un triangle rectangle en A . On note a (resp. b , c) la longueur du segment $[BC]$ (resp. $[AC]$, $[AB]$) et β l'angle non orienté \widehat{CBA} . Alors,

$$\cos(\beta) = \frac{c}{a} \text{ et } \sin(\beta) = \frac{b}{a}.$$

Illustration graphique



Proposition 8 - Formules d'addition

Pour tous a, b réels,

$$\cos(a + b) = \cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b),$$

$$\sin(a + b) = \sin(a) \cos(b) + \sin(b) \cos(a).$$

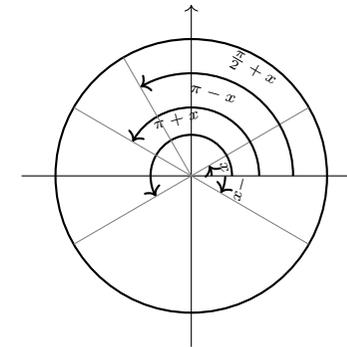
Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos(-x) = \cos(x) \quad \sin(-x) = -\sin(x)$$

$$\cos(\pi - x) = -\cos(x) \quad \sin(\pi - x) = \sin(x)$$

$$\cos(\pi + x) = -\cos(x) \quad \sin(\pi + x) = -\sin(x)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x) \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)$$



Exemple 7 - Formules d'addition

Nous pouvons généraliser les expressions précédentes :

$$\begin{aligned} \cos(a - b) &= \cos(a) \cos(-b) - \sin(a) \sin(-b) \\ &= \cos(a) \cos(b) + \sin(a) \sin(b), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin(a - b) &= \sin(a) \cos(-b) + \sin(-b) \cos(a) \\ &= \sin(a) \cos(b) - \sin(b) \cos(a). \end{aligned}$$

Théorème 2 - Théorème de Pythagore

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.

II.2 - Équations trigonométriques**Définition 5 - Modulo**

Pour tous x, y, v réels, la relation $x \equiv y [v]$ se lit x est congru à y modulo v et signifie qu'il existe un entier relatif k tel que $x = y + kv$.

Proposition 9

Pour tout couple de réels (x, y) ,

- $\sin(x) = \sin(y)$ si et seulement si

$$x \equiv y [2\pi] \text{ ou } x \equiv \pi - y [2\pi].$$

- $\cos(x) = \cos(y)$ si et seulement si

$$x \equiv y [2\pi] \text{ ou } x \equiv -y [2\pi].$$

- $\cos(x) = \cos(y)$ et $\sin(x) = \sin(y)$ si et seulement si

$$x \equiv y [2\pi].$$

Exemple 8 - Résolution d'équation

Soit x tel que $\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Alors,

$$\begin{aligned} \cos(x) &= \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ x &\equiv \frac{\pi}{4} [2\pi] \text{ ou } x \equiv -\frac{\pi}{4} [2\pi]. \end{aligned}$$

Lemme 1 - Paramétrisation du cercle unité

Pour tous x, y réels tels que $x^2 + y^2 = 1$, il existe un réel θ tel que

$$x = \cos(\theta), y = \sin(\theta).$$

III - Module et Argument**III.1 - Module****Définition 6 - Module**

Pour tout nombre complexe $z = a+bi$ écrit sous forme algébrique, le *module* de z , noté $|z|$, est le réel

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Exemple 9 - Calculs de modules

$$|2| = \sqrt{2 \times 2} = 2,$$

$$|-3| = \sqrt{(-3) \times (-3)} = 3,$$

$$|i| = \sqrt{i \times (-i)} = 1,$$

$$|1 + i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2},$$

$$|3 - \sqrt{2}i| = \sqrt{9 + 2} = \sqrt{11}.$$

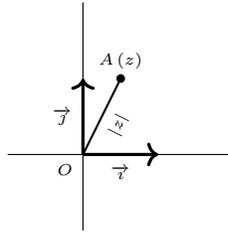
Proposition 10 - Interprétation géométrique

Soit M un point du plan d'affixe z . La distance OM du point M à l'origine est égale au module $|z|$.

Soient A, B deux points du plan d'affixes respectifs a, b . Le vecteur \overrightarrow{AB} a pour affixe $(b - a)$. Ainsi, la longueur AB est égale au module du nombre complexe $b - a$.

Module

Représentation de l'image d'un nombre complexe ainsi que de son module :

**Proposition 11 - Module**

Soit z un nombre complexe.

- $|z| = 0$ si et seulement si $z = 0$.
- $|\bar{z}| = |z|$.
- $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$ et $|\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$.
- Si z est non nul, alors $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$.

Proposition 12 - Module et Opérations

Soient z_1, z_2 deux nombres complexes.

- $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$.
- **Inégalité triangulaire** : $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ avec égalité si et seulement s'il existe λ réel positif tel que $z_1 = \lambda z_2$ ou $z_2 = \lambda z_1$.

III.2 - Exponentielle complexe**Définition 7 - Exponentielle complexe**

Soit $z = x + yi$ un nombre complexe sous forme algébrique. On note $e^z = e^x (\cos(y) + \sin(y) i)$.

Exemple 10 - Exponentielles complexes

$$e^2 = e^{2+0i} = e^2$$

$$e^{\frac{\pi}{2}i} = e^0 \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) i \right) = i$$

$$e^{i\pi} = e^0 (\cos(\pi) + \sin(\pi) i) = -1.$$

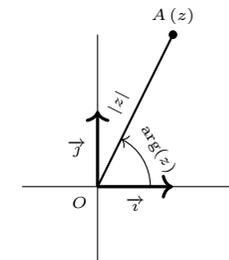
Définition 8 - Argument, Forme trigonométrique

Soit z un nombre complexe non nul.

- Tout réel θ tel que $z = |z| e^{i\theta}$ est **un argument** de z .
- L'unique réel $\theta \in]-\pi; \pi]$ tel que $z = |z| e^{i\theta}$ est **l'argument principal** de z , noté $\arg(z)$.
- Le nombre complexe z s'écrit sous la forme $z = |z| e^{i \arg(z)}$. Cette écriture est la *forme trigonométrique* du nombre complexe z .

Module & Argument

Représentation de l'image d'un nombre complexe ainsi que de son module :



Exemple 11 - Formes trigonométriques

Mise sous forme trigonométrique en factorisant par le module puis en reconnaissant un argument classique :

$$\begin{aligned}
 2 &= 2e^{0i}, \\
 -3 &= 3e^{i\pi}, \\
 i &= e^{i\frac{\pi}{2}}, \\
 1+i &= \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) = \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)i \right) \\
 &= \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}.
 \end{aligned}$$

Proposition 13 - Exponentielle et Opérations

- $\forall z, z' \in \mathbb{C}, e^{z+z'} = e^z \cdot e^{z'}$.
- Pour tout $z \in \mathbb{C}, e^z \neq 0$.

Exemple 12 - Forme trigonométrique

En utilisant le calcul précédent,

$$\begin{aligned}
 (1+i)^2 &= \left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^2 = 2e^{i\frac{\pi}{2}} = 2i. \\
 (1+i)^4 &= \left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^4 = 4e^{i\pi} = -4.
 \end{aligned}$$

IV - Transformations géométriques

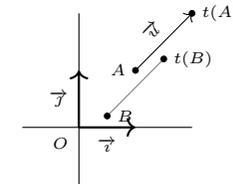
Proposition 14 - Translations, Homothéties, Rotations

- Soit \vec{u} un vecteur d'affixe b . L'image d'un point M d'affixe z par la translation de vecteur \vec{u} a pour affixe $z + b$.
- Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $\omega \in \mathbb{C}$. L'image d'un point M d'affixe z par la rotation d'angle θ et de centre d'affixe ω a pour affixe $e^{i\theta}(z - \omega) + \omega$.

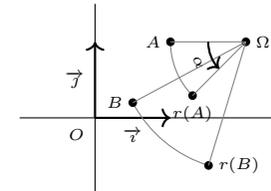
- Soient $k \in \mathbb{R}^*$ et $\omega \in \mathbb{C}$. L'image d'un point M d'affixe z par l'homothétie de centre d'affixe ω et de rapport k a pour affixe $k(z - \omega) + \omega$.

Transformations du plan complexe

- Soient $t : z \mapsto z + (1 + i)$ et \vec{u} le vecteur d'affixe $1 + i$.



- Soient $r : z \mapsto e^{i\frac{\pi}{4}}(z - (2 + i)) + (2 + i)$, Ω le point d'affixe $2 + i$ et $\alpha = \frac{\pi}{4}$.



- Soient $h : z \mapsto 3(z - (2 + i)) + (2 + i)$, Ω le point d'affixe $2 + i$ et $k = 3$.

