VI - Changement de bases

On considère deux espaces vectoriels E et F de dimensions finies, u un vecteur de E et f une application linéaire de E vers F.
L'introduction de bases permet de considérer les matrices associées aux vecteurs et aux applications linéaires. Passer des vecteurs / applications linéaires aux matrices permet de transformer ces concepts abstraits en objets calculatoires. L'aspect calculatoire peut s'avérer plus facile à manipuler, surtout avec l'aide d'ordinateurs. Cependant, la matrice dépend intrinsèquement de la base choisie.
Les formules de changement de bases permettent de décrire l'effet d'un changement de bases sur les matrices.

Définition 1 - Matrice de passage

Soient $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ et $\mathscr{B}' = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ deux bases de E. Comme $\mathscr{B}$ est une base de E, tout vecteur de $\mathscr{B}'$ se décompose dans la base $\mathscr{B}$:

$$\forall\, j \in [\![1, n]\!],\ \exists\, (a_{1,j}, \ldots, a_{n,j}) \in \mathbb{R}^n\ ;\ \varepsilon_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i.$$

La matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ est la matrice

$$P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}\,.$$

Remarque 1

* Pour exprimer la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$, on décompose les vecteurs de $\mathscr{B}'$ dans la base $\mathscr{B}$ et on range leurs coordonnées en colonne dans une matrice.
  La base $\mathscr{B}$ est généralement appelée *ancienne* base et la base $\mathscr{B}'$ *nouvelle* base.
* On peut montrer que

$$P_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}} = \left(P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}\right)^{-1}.$$

Exemple 1

On considère les bases de $\mathbb{R}^2$ suivantes :

$$\mathscr{B} = ((1,2),\ (4,3)),$$
$$\mathscr{B}' = ((-1,1),\ (2,1)).$$

Comme $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}^2$, si (x,y) est un vecteur de $\mathbb{R}^2$, il existe deux réels α et β tels que $(x,y) = \alpha(1,2) + \beta(3,4)$. En effet,

$$(x,y) = \alpha(1,2) + \beta(4,3)$$
$$(x,y) = (\alpha + 4\beta, 2\alpha + 3\beta)$$
$$\begin{cases} \alpha + 4\beta & = x \\ 2\alpha + 3\beta & = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + 4\beta & = x \\ -5\beta & = y - 2x \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha & = \frac{-3x+4y}{5} \\ \beta & = \frac{2x-y}{5} \end{cases}$$

Ainsi,

$$(x,y) = \frac{-3x+4y}{5}(1,2) + \frac{2x-y}{5}(4,3).$$

En particulier,

$$(-1,1) = \frac{7}{5}(1,2) - \frac{3}{5}(4,3)$$
$$(2,1) = -\frac{2}{5}(1,2) + \frac{3}{5}(4,3)$$

Ainsi,

$$P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} \frac{7}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

I - Les vecteurs

Proposition 1 - Changement de base

Soient u un vecteur de E ainsi que $\mathscr{B}$ (l'*ancienne*) et $\mathscr{B}'$ (la *nouvelle*) deux bases de E. On note $P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$ la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$. Alors,

$$\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}'}(u).$$

Autrement dit,

$$\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}'}(u) = \left(P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}\right)^{-1} \operatorname{Mat}_{BB}(u).$$

Remarque 2

Il y a plusieurs stratégies pour se rappeler du sens de cette formule :

* la version poétique : la matrice de passage de l'ancienne base à la nouvelle permet d'exprimer les coordonnées de u dans l'ancienne base en fonction de celles dans la nouvelle.
* la version pessimiste : la matrice $P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$ est la plus facile à obtenir mais c'est malheureusement de son inverse dont on a besoin !
* la version Chasles : on reconnaît une *relation de Chasles* où les bases se *simplifient* :

$$P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}'}(u) = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(u).$$

Exemple 2

Soit $u = (4,5) \in \mathbb{R}^2$. On considère les bases $\mathscr{B} = ((1,2),(4,3))$ et $\mathscr{B}' = ((-1,1),(2,1))$.

* D'une part, $(4,5) = \frac{8}{5}(1,2) + \frac{3}{5}(4,3)$. Ainsi,

$$\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

* D'après le résultat précédent,

$$\begin{aligned}\left(P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}\right)^{-1} &= \frac{5}{7 \times 3 - (-3) \times (-2)} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

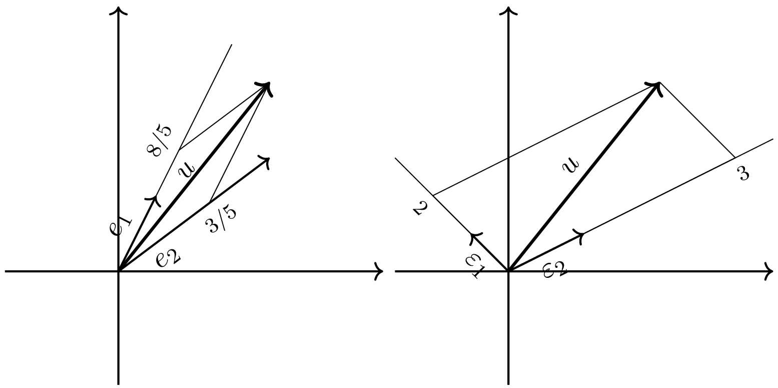
* D'après la formule de changement de base,

$$\begin{aligned}\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}'}(u) = \left(P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}\right)^{-1} \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(u) &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \times \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 30 \\ 45 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$(4,5) = 2(-1,1) + 3(2,1).$$

Finalement, le vecteur u est de coordonnées $(8/5, 3/5)$ dans la base $\mathscr{B}$ et de coordonnées $(2,3)$ dans la base $\mathscr{B}'$:



II - Les endomorphismes

Remarque 3

Soit $f \in \mathscr{L}(E, E)$ un endomorphisme de E et $\mathscr{B}$ une base de E.

* On rappelle que le produit matriciel a été défini de telle sorte que :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f(u)) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u).$$

* Pour exprimer la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$, pour chaque vecteur e_i de $\mathscr{B}$, on exprime le vecteur $f(e_i)$ dans la base $\mathscr{B}$. La base $\mathscr{B}$ est donc utilisée : pour exprimer les vecteurs de l'espace de départ (en rouge) de f et ceux *renvoyés* par f (en bleu). La matrice de f dans la base $\mathscr{B}$ est notée $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$:

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} f(e_1) & \cdots & f(e_n) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{array} \end{array}$$

* En changeant la base de E, on doit changer à la fois l'expression des vecteurs qui sont *mangés* par f (ceux de la base rouge) et ceux qui sont *renvoyés* par f (ceux exprimés dans la base bleue).

Théorème 1 - Changement de bases

Soient $f \in \mathscr{L}(E, E)$ un endomorphisme de E et $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$ deux bases de E. Alors,

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) = \left(P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}\right)^{-1} \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}.$$

Remarque 4

* Ci-dessous, on *double* la notation concernant la base pour bien remarquer que la base de départ **et** la base d'arrivée sont importantes. On pourra remarquer une relation de Chasles :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}'}(f) = P_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}} \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(f) P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}.$$

* En lisant le schéma suivant en commençant par la plus petite accolade et en utilisant la formule de changement de base d'un vecteur, on retrouve naturellement la formule de changement de base :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(u) = \underbrace{P_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}\underbrace{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)\underbrace{P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}\underbrace{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(u)}_{u \text{ dans la base} \mathscr{B}'}}_{u \text{ dans la base} \mathscr{B}}}_{f(u) \text{ dans la base } \mathscr{B}}}_{f(u) \text{ dans la base } \mathscr{B}'}$$

Exemple 3

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$ défini par $f(x, y) = (x + 2y, 2x + y)$. On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $\mathscr{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, où

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0), \\ e_2 &= (0, 1), \\ \varepsilon_1 &= (1, 1) = e_1 + e_2, \\ \varepsilon_2 &= (-1, 1) = -e_1 + e_2. \end{aligned}$$

* Comme $f(e_1) = (1, 2)$ et $f(e_2) = (2, 1)$, alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

* Comme $f(\varepsilon_1) = (3, 3) = 3\varepsilon_1$ et $f(\varepsilon_2) = (1, -1) = -\varepsilon_2$,

alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

* D'après les définitions,

$$P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, d'après les formules de changment de bases,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}.$$

III - Les morphismes

Lorsque les espaces de départ et d'arrivée sont distincts, on peut modifier la base de départ et la base de l'espace d'arrivée indépendemment l'une de l'autre. On obtient une généralisation de la partie précédente.

Remarque 5

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$ un morphisme de E dans F, $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et $\mathscr{C} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p)$ une base de F.

Pour exprimer la matrice la matrice de f dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$, pour chaque vecteur e_i de $\mathscr{B}$, on exprime le vecteur $f(e_i)$ dans la base $\mathscr{C}$. La matrice de f dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ est notée $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$:

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(e_1) & \cdots & f(e_n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_p \end{array}$$

On pourrait noter plus judicieusement :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(e_1) & \cdots & f(e_n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_p \end{array}$$

Cette matrice n'est pas carrée dès lors que E et F ne sont pas de mêmes dimensions.

Théorème 2 - Changement de bases

Soient $f \in \mathscr{L}(F, E)$ un morphisme de E dans F, $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$ deux bases de E et $\mathscr{C}$, $\mathscr{C}'$ deux bases de F. Alors,

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{C}'}(f) = \left(P_{\mathscr{C}}^{\mathscr{C}'}\right)^{-1} \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}.$$

Remarque 6

* Ci-dessous, on modifie la notation standard pour noter $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}}(f)$ la matrice de f de la base $\mathscr{B}$ dans la base $\mathscr{C}$ afin de faire apparaître une relation de Chasles :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}'}^{\mathscr{B}'}(f) = P_{\mathscr{C}'}^{\mathscr{C}} \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}}(f) P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}.$$

* En lisant le schéma suivant en commençant par la plus petite accolade et en utilisant la formule de changement de base d'un vecteur, on retrouve naturellement la formule de changement de base :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}'}^{\mathscr{B}'}(f)\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(u) = \underbrace{P_{\mathscr{C}'}^{\mathscr{C}} \underbrace{\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}}(f) \underbrace{P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} \underbrace{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(u)}_{u \text{ dans la base} \mathscr{B}'}}_{u \text{ dans la base} \mathscr{B}}}_{f(u) \text{ dans la base } \mathscr{C}}}_{f(u) \text{ dans la base } \mathscr{C}'}$$