Devoir en temps libre

À rendre le lundi 09/09/2024

■ ■ ■

La question **6.** n'est pas à traiter dans ce devoir libre. Les fonctions à plusieurs variables seront étudiées ultérieurement. Les questions posées dans ce sujet ne figurent pas au programme actuel de la filière D2.

Exercice 1. On notera e^x la fonction exponentielle. On rappelle que $\mathrm{e} = \mathrm{e}^1$ vaut environ 2,7.

1. Déterminer sur $\mathbb{R}$ le tableau de variation de la fonction :

$$f_1(x) = \mathrm{e}^x - x - 1.$$

En déduire que pour tout x de $\mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x \geqslant 1 + x$.

2. On considère la fonction g définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $g(x) = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{xu}\, \mathrm{d}u$.

a) Justifier que la fonction est bien définie sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que g est croissante au sens large sur $\mathbb{R}$.

c) Montrer que si $x \geqslant 0$, $1 \leqslant g(x) \leqslant \mathrm{e}^x$.

d) Montrer que si $x \leqslant 0$, $\mathrm{e}^x \leqslant g(x) \leqslant 1$.

e) En déduire que g est continue en 0.

3. Montrer que

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0, \\ \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} & \text{si } x \in \mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[. \end{cases}$$

4. Déterminer sur $[-1, 1]$ le tableau de variation de la fonction :

$$f_2(x) = \mathrm{e}^x - x^2 - x - 1.$$

En déduire que pour tout x de $[-1, 1]$, $\mathrm{e}^x \leqslant 1 + x + x^2$.

5. a) Montrer que si x est non nul, la fonction g est dérivable au point x et calculer sa dérivée.

b) Montrer que pour tout $x \in [-1, 1]$,

$$1 + \frac{1}{2}x \leqslant g(x) \leqslant 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2.$$

En déduire que g est dérivable au point 0 et que $g'(0) = \frac{1}{2}$.

6. On considère la fonction H de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$H(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = y, \\ \frac{\mathrm{e}^{(x-y)} - 1}{x-y} & \text{si } x \neq y. \end{cases}$$

a) Montrer que H est continue sur $\mathbb{R}^2$.

b) Déterminer après avoir justifié leur existence, les dérivées partielles

$$\frac{\partial H}{\partial x}(1, 0),\ \frac{\partial H}{\partial y}(1, 0).$$

c) Déterminer après avoir justifié leur existence, les dérivées partielles

$$\frac{\partial H}{\partial x}(0, 0),\ \frac{\partial H}{\partial y}(0, 0).$$