



Exercice 1. PARTIE I

On considère la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$t : x \mapsto t(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

1. Étudier cette fonction et donner son tableau de variation en précisant ses limites en $+\infty$ et $-\infty$. Tracer une représentation graphique de t sur \mathbb{R} .
2. Soit x et y des nombres réels. Démontrer la relation suivante

$$t(x + y) = \frac{t(x) + t(y)}{1 + t(x)t(y)}.$$

PARTIE II

Dans la suite du problème, on étudie les fonctions f définies sur \mathbb{R} telles que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, |f(x)| < 1, \text{ et } f(x + y) = \frac{f(x) + f(y)}{1 + f(x)f(y)}.$$

3. Montrer que $f(0) = 0$.
 4. On suppose que f est continue en 0. Démontrer que f est continue sur \mathbb{R} .
 5. On suppose désormais, et jusqu'à la fin du problème, que f est dérivable en 0. Démontrer que f est dérivable sur \mathbb{R} .
 6. Montrer que f est impaire.
- On admet, pour la question suivante, que f est de signe constant sur \mathbb{R}_+ .
7. Montrer que f est monotone.
 8. Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \frac{1 + f(x)}{1 - f(x)}.$$

Montrer que, pour tout nombre réel a , le rapport $\frac{g(x+a)}{g(x)}$ est indépendant de x .

9. En déduire les fonctions g , puis f .
Indication : On pourra calculer $g'(x)$.