■ ■ ■

Problème. () On définit les fonctions g, $h : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ par

$$g(t) = (t+1)\ln(t) - 2(t-1),$$
$$h(t) = 2(t^2-1)\ln(t) - 4(1-t)^2.$$

1. Jusitifier que g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et étudier les variations de g.

2. a) Trouver un polynôme P tel que $h = gP$.

b) En déduire les variations de h, et montrer que pour tout $t > 0$, $h(t) \geqslant 0$.

On s'intéresse maintenant à la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = (x-y)(\ln(x) - \ln(y)) - 4(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2.$$

3. a) Montrer que l'on peut écrire $f(x,y) = xh(v(x,y))$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ avec v une certaine fonction définie sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.

b) Justifier que $f(x,y) \geqslant 0$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.

4. a) Quelle condition nécessaire doit satisfaire (x^*, y^*) pour que f admette un extremum en (x^*, y^*) ?

b) Avec le changement de variable $t = \frac{y}{x}$, conclure sur les possibles extrema de f.

On pourra utiliser l'égalité $t + \frac{1}{t} = \left(\sqrt{t} + \frac{1}{\sqrt{t}}\right)^2 - 2$.

c) Montrer que f admet un minimum global.