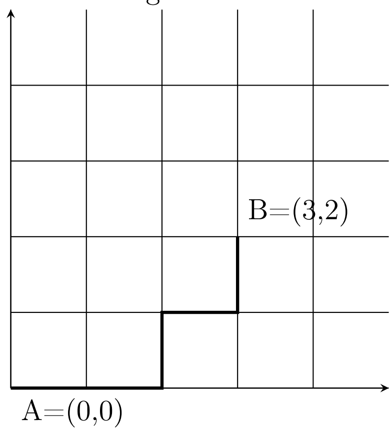
■ ■ ■

Exercice 1. L'objet du problème est de compter le nombre de chemins reliant deux points d'un quadrillage, en effectuant uniquement des pas de gauche à droite (de (a, b) à $(a + 1, b)$) et de bas en haut (de (a, b) à $(a, b + 1)$).
Précisément, on appellera chemin reliant les points $A = (a, b)$ et $P = (p, q)$ de coordonnées entières une succession de pas, soit de gauche à droite, noté D, soit de bas en haut, noté H, telles que le nombre de D dans le chemin soit égal à $p - a$ et le nombre de H dans le chemin soit égal à $q - b$. La longueur du chemin est égale au nombre de termes D ou H dans le chemin. Par exemple, le chemin $c = (DDHDH)$ relie le point $(0, 0)$ au point $(3, 2)$ et est de longueur 5.



Dans toute la suite, p, q et $n \in \mathbb{N}^*$ sont des entiers strictement positifs fixés.
Il est vivement conseillé d'illustrer les raisonnements par des dessins.

Préliminaires.

1. Partant de $A = (3, 1)$, où arrive le chemin $(HDDHHH)$?

2. Énumérer tous les chemins reliant $(0, 0)$ à $(1, 3)$. Combien y en a-t-il ?

3. Quelle est la longueur d'un chemin reliant $A = (0, 0)$ à $P = (p, q)$?

4. Donner une condition nécessaire et suffisante sur un chemin pour qu'il relie le point $A = (0, 0)$ au point $P = (p, q)$.

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Combien y-a-t-il de chemins de longueur n ?

Première partie.
On se propose de compter les chemins reliant $A = (0, 0)$ à $P = (p, q)$. On appelle $N_{p,q}$ cette valeur.

6. On considère la fonction Φ sur les chemins qui échange les valeurs D et H. Par exemple, $\Phi(DDHD) = (HHDH)$. Montrer que Φ est une bijection.

7. En déduire que $N_{p,q} = N_{q,p}$, nombre de chemins reliant $A = (0, 0)$ à $Q = (q, p)$.

8. Montrer que $N_{p-1,q} + N_{p,q-1} = N_{p,q}$.

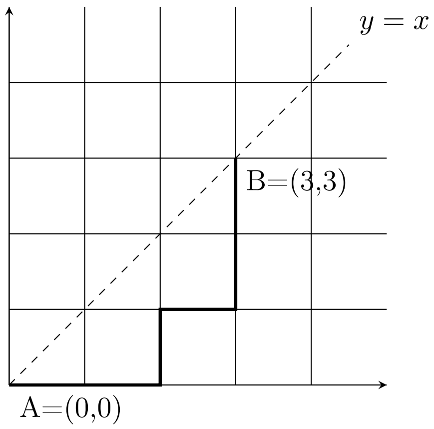
9. Soit c un chemin reliant $A = (0, 0)$ à $P = (p, q)$. Combien y-a-t-il de D ? Quelle est la longueur du chemin ? En déduire directement la valeur $N_{p,q}$.

10. En comptant de deux façons différentes le nombre de chemins allant du point $A = (0, 0)$ au point $B = (n, n)$, montrer que

$$\sum_{k=0}^{n} N_{k,n-k}^2 = N_{n,n}.$$

Indication : quelle est la longueur des chemins ?

Seconde partie.
On s'intéresse désormais aux chemins allant du point $A = (0, 0)$ au point $B = (n, n)$ restant toujours sous la diagonale (première bissectrice, $y = x$) mais qui peuvent la toucher. Ici un chemin sous la diagonale de $A = (0, 0)$ à $B = (3, 3)$.



On note C_n le nombre de chemins sous la diagonale et l'on pose par convention $C_0 = 1$. Un chemin ne restant pas sous la diagonale sera appelé chemin franchissant. On note F_n le nombre de chemins franchissants.

11. Quel est le premier terme d'un chemin sous la diagonale ? le dernier ?

12. Calculer le nombre de chemins sous la diagonale, ne rencontrant la diagonale qu'aux extrémités A et B.

13. Soit c un chemin sous la diagonale rencontrant la diagonale au moins une fois en dehors des extrémités. On note $K = (k, k)$, $0 < k < n$ le premier point de rencontre. Montrer que le nombre de chemins sous la diagonale rencontrant la diagonale pour la première fois en $K = (k, k)$ est égal à $C_{k-1}C_{n-k}$.

14. En déduire la formule de récurrence

$$C_n = \sum_{k=1}^{n} C_{k-1}C_{n-k}.$$

15. Calculer C_4 à l'aide de cette formule.

16. Que vaut la somme $C_n + F_n$?

17. Soit c un chemin franchissant. On note $K = (k, k)$, $0 < k < n$ le premier point de franchissement et $K' = (k, k+1)$ le premier point au-dessus strictement de la diagonale. Le chemin c se décompose donc en un chemin c_1 de A à K' suivi d'un chemin c_2 de K' à B. Quel est le point d'arrivée du chemin $\Phi(c_2)$ (où la fonction Φ est la fonction définie en première partie qui échange les valeurs D et H) partant de K' ? Montrer que la transformation d'un chemin c (franchissant en K) vers le chemin c' consistant en c_1 suivi de $\Phi(c_2)$ réalise une bijection des chemins franchissants vers tous les chemins reliant $A = (0, 0)$ à $B' = (n-1, n+1)$.

18. En déduire la formule $C_n = N_{n,n} - N_{n-1,n+1}$.

19. En utilisant la première partie, déduire de la question précédente la formule

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$