Devoir en temps libre

À rendre le lundi 16/12/2024

■ ■ ■

Exercice 1.

Partie 0 : Identités binomiales

Les résultats de cette partie peuvent être admis si besoin pour la partie II.

1. a) Soit k, $n \in \mathbb{N}^*$, $k \leqslant n$. Montrer que $n\binom{n-1}{k-1} = k\binom{n}{k}$.

b) Montrer que $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$.

c) Soit $k \in \mathbb{N}^*$ fixé. Soit $N \in \mathbb{N}^*$ et $N \geqslant k$. Montrer que :

$$\sum_{n=k}^{N} \binom{n}{k} = \binom{N+1}{k+1}.$$

Indication : On pourra utiliser une récurrence sur $\mathbb{N}$.

Partie I : Urnes et probabilités

Une urne contient $N \in \mathbb{N}^*$ boules indiscernables au toucher, numérotées de 1 à N ?

2. Dans une première expérience, on tire successivement **avec remise** les boules une par une, jusqu'à tirer la boule marquée du chiffre 1. On note alors X le nombre de tirages effectués. Quelle est la loi de X ? En préciser les paramètres.

3. Dans une seconde expérience, on tire successivement **sans remise** les boules une par une, jusqu'à tirer la boule marquée du chiffre 1. On note alors Y le nombre de tirages effectués. Montrer que Y suit une loi uniforme sur $\{1, \dots, N\}$.

4. Dans une troisième expérience, on effectue un tirage de $r \in \{1, \dots, N\}$ boules **sans remise**, et l'on note Z le nombre de boules tirées et marquées d'un chiffre inférieur ou égal à $m \in \{1, \dots, N\}$. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \leqslant m$, $n \leqslant r$. Montrer que $\mathbf{P}(Z = n) = \frac{\binom{m}{n}\binom{N-m}{r-n}}{\binom{N}{r}}$.

Partie II : Construction d'un estimateur

L'objectif de cette partie est de construire un estimateur du nombre N de boules dans l'urne. On suppose que l'on a tiré **successivement et sans remise** k boules dans l'urne, k fixé. On note $X_1, \dots, X_k$ les numéros du tirage, et on définit $X_{(k)} = \max\{X_1, \dots, X_k\}$.

5. Montrer que $\mathbf{P}\left(X_{(k)} = n\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leqslant n < k, \\ \frac{\binom{n-1}{k-1}}{\binom{N}{k}} & \text{si } k \leqslant n \leqslant N. \end{cases}$

6. Montrer que $\mathbf{E}\left[X_{(k)}\right] = \frac{k}{k+1}(N+1)$.

7. En déduire un estimateur sans biais de N.