Devoir en temps libre

À rendre le lundi 06/01/2025

■ ■ ■

Exercice 1. On rappelle l'expression suivante de l'exponentielle :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $X_1, X_2, \ldots, X_n$, n variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, de loi de Poisson de paramètre λ. On nomme $S = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$.

1. a) Soit $m \in \mathbb{N}$. En utilisant l'égalité d'ensembles

$$\{X_1 + X_2 = m\} = \bigcup_{k=0}^{m} \{X_1 = k\} \cap \{X_2 = m-k\},$$

calculer $\mathbf{P}\left(X_1 + X_2 = m\right)$.

b) En déduire la loi de la variable aléatoire $X_1 + X_2$.

c) Montrer alors que S_n suit une loi de Poisson de paramètre $n\lambda$.

2. Soit $\overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$. Montrer que $\overline{X}_n$ est un estimateur non biaisé de λ.

3. Dans cette partie, on cherche à estimer de la meilleure façon possible $\mathrm{e}^{-\lambda}$. Pour tout $i = 1, \ldots, n$, on pose $Y_i = 1$ si $X_i = 0$ et $Y_i = 0$ sinon. On considère $N = \sum\limits_{i=1}^{n} Y_i$.

a) Déterminer la loi de Y_i, pour $i = 1, \ldots, n$. En déduire la loi de N.

b) Montrer que $\frac{N}{n}$ est un estimateur sans biais de $\mathrm{e}^{-\lambda}$.

On définit, pour tout $j \in \mathbb{N}$, $\varphi(j) = \mathbf{P}_{[S_n=j]}\left(X_1 = 0\right)$.

c) Montrer que pour tout $j \in \mathbb{N}$, $\varphi(j) = \left(\frac{n-1}{n}\right)^j$.

d) Montrer que $\varphi(S_n)$ est un estimateur sans biais de $\mathrm{e}^{-\lambda}$.

e) **Bonus.** On rappelle que lorsque l'on a deux estimateurs sans biais, on préfère celui dont la variance est la plus faible. Démontrer que, quelle que soit la valeur de λ, $\varphi(S_n)$ est un meilleur estimateur que $\frac{N}{n}$.