Devoir en temps libre

À rendre le lundi 14/01/2025

■ ■ ■

Exercice 1.

Première partie

Soit $(a,b) \in]0,1[^2$ vérifiant $a+b<1$. Soit X une variable aléatoire discrète dont la distribution est donnée par :

$$X = \begin{cases} 1 & \text{, avec probabilité } a \\ 0 & \text{, avec probabilité } 1-(a+b) \\ -1 & \text{, avec probabilité } b \end{cases}$$

1. Calculez l'espérance de X.

2. On pose $Y = X^2$.

a) Quelle est la loi de Y ?

b) Calculez l'espérance de Y.

c) Combien vaut la variance de X ?

d) Calculez la variance de Y.

e) Quelle est la loi de $P = \frac{Y+X}{2}$?

f) Quelle est la loi de $M = \frac{Y-X}{2}$?

3. Calculez

a) $\mathbf{P}_{[Y=1]}(X=1)$,

b) $\mathbf{P}_{[X=1]}(Y=1)$,

c) $\mathbf{P}(P=M)$,

d) $\mathbf{P}(PM=0)$.

4. a) Pour quelles valeurs de a et b a-t-on l'égalité

$$\mathbf{P}_{[Y=1]}(X=1) = \mathbf{P}_{[P=0]}(X=0) \text{ ?} \tag{1.1}$$

Représentez l'ensemble des solutions dans un plan cartésien.

b) Pour quelles valeurs de a et b a-t-on l'égalité

$$\mathbf{P}_{[Y=1]}(X=-1) = \mathbf{P}_{[M=0]}(X=0) \text{ ?} \tag{1.2}$$

Représentez l'ensemble des solutions sur le graphique précédent.

c) Les deux équations (1.1) et (1.2) peuvent-elles être simultanément vérifiées ?

Deuxième partie

On tire $X_1, \ldots, X_n$, un échantillon de n variables aléatoires indépendantes de même loi que X et, pour chaque tirage X_i, on définit les variables Y_i, P_i et M_i comme précédemment.

5. On pose $S_P = \sum_{i=1}^{n} P_i$.

a) Montrez que S_P donne le nombre de tirages X_i égaux à 1.

b) Quelle est la loi de S_P ?

c) On estime a par $\hat{a}_1 = \frac{S_P}{n}$. Calculez l'espérance et la variance de $\hat{a}_1$.

6. On suppose désormais que $a = b$.

a) Montrez que $a < \frac{1}{2}$.

b) On pose $S_M = \sum_{i=1}^{n} M_i$.

i. Pourquoi peut-on estimer a par $\hat{a}_0 = \frac{S_M}{n}$?

ii. Calculez l'espérance et la variance de $\hat{a}_0$.

c) Pour $t \in]0,1[$, on pose $\hat{a}_t = t\hat{a}_1 + (1-t)\hat{a}_0$.

i. Calculez l'espérance et la variance de $\hat{a}_t$.

ii. Pour quelle valeur de $t^* \in]0,1[$, a-t-on une variance minimale ?

d) Quel est le meilleur estimateur de a : $\hat{a}_1$, $\hat{a}_0$ ou $\hat{a}_{t^*}$?

e) Montrez que

$$\hat{a}_{t^*} = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{2n}.$$