Devoir en temps libre

À rendre le lundi 21/01/2025

■ ■ ■

Exercice 1. On considère l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels, $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, et les trois matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On note $\mathbf{F}$ le sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par la famille $\mathscr{B} = (A, B, C)$ et pour a, b, c réels on pose

$$M_{abc} = aA + bB + cC.$$

1. Prouver que la famille $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbf{F}$. Donner la dimension de $\mathbf{F}$.

2. Montrer que la matrice C^2 appartient à $\mathbf{F}$. Donner ses coordonnées dans la base $\mathscr{B}$.

Dans la suite de l'exercice, on considère les matrices suivantes :

$$N_1 = A - B - C,\ N_2 = 2A - 2B - C,\ N_3 = A.$$

3. Montrer que la famille $\mathscr{B}' = (N_1, N_2, N_3)$ est une base de $\mathbf{F}$.

4. Donner la matrice de passage P de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$. Déterminer son inverse.

5. Soit a, b, c trois nombres réels. On note x, y, z les coordonnées de M_{abc} dans $\mathscr{B}'$. On a donc $M_{abc} = xN_1 + yN_2 + zN_3$. Exprimer x, y, z en fonction de a, b, c.

Exercice 2. Partie I

Lors de l'entretien d'embauche pour un poste de relecteur, l'employeur fournit un texte contenant n erreurs, indépendantes les unes des autres et connues de l'employeur mais pas du relecteur. On numérote les erreurs avec l'indice j allant de 1 à n. On suppose que la probabilité p de repérer une erreur est la même pour toutes les erreurs, et par la suite, on appellera p la qualité du relecteur. On note $X_j = 1$ si l'erreur j est repérée, $X_j = 0$ sinon.

1. Quelle est la loi de probabilité de X_j ? Quelle est son espérance ?

2. Montrer que $\hat{p} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$ est un estimateur sans biais de p. Quelle est sa variance ?

3. Montrer que lorsque n tend vers l'infini, l'erreur quadratique moyenne de $\hat{p}$ définie par

$$EQM(\hat{p}) = \mathbf{E}\left[\hat{p} - p\right]^2 + \mathbf{V}\left(\hat{p}\right)$$

tend vers 0 .
On en conclut que l'on peut estimer p aussi précisément que l'on veut.

Partie II

On donne le texte à plusieurs relecteurs indépendants les uns des autres, chaque relecteur étant indicé par un entier $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose qu'on a une probabilité p de repérer chaque erreur, toujours la même quel que soit le relecteur. Un même relecteur peut repérer plusieurs erreurs et une même erreur peut être repérée par plusieurs relecteurs.

4. On fixe j un entier, $1 \leqslant j \leqslant n$ et on ne considère que la j-ième erreur. Soit Y_j la variable aléatoire égale au nombre de relecteurs nécessaires pour repérer cette erreur pour la première fois. Déterminer la loi suivie par Y_j.

5. Calculer la fonction de répartition G_j de Y_j.

6. Soit X donnant le nombre de relecteurs nécessaires pour repérer toutes les erreurs au moins une fois. Exprimer X en fonction des Y_j puis calculer sa fonction de répartition F.

7. Soit $k \in \mathbb{N}$. Quelle est la probabilité que $X = k$?

8. S'il n'y a qu'une seule erreur dans le texte, combien faut-il de relecteurs de qualité $p = \frac{1}{2}$ pour avoir au moins autant de chances de repérer l'erreur qu'avec un unique relecteur de qualité $p = \frac{3}{4}$?

9. De même, combien faut-il de relecteurs de qualité $p = \frac{1}{2}$ pour avoir au moins autant de chances de repérer deux erreurs qu'avec le relecteur de qualité $p = \frac{3}{4}$? Peut-on généraliser ?