■ ■ ■

Problème. () On considère un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3, muni de la base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et $f : E \to E$ l'application linéaire associée à la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

dans la base $\mathscr{B}$. Pour une application linéaire f, la notation f^k désigne l'application f composée k fois avec elle-même, c'est-à-dire $f^2 = f \circ f$ et pour tout $k \geqslant 2$, $f^k = f \circ f^{k-1}$.
On rappelle que pour deux matrices A et B qui commutent, c'est-à-dire telles que $AB = BA$, on a la formule du binôme de Newton

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}.$$

1. Donner $f(e_1)$, $f(e_2)$ et $f(e_3)$.

2. Déterminer le rang de f. L'application est-elle bijective ? En déduire $\dim(\operatorname{Ker} f)$, la dimension du noyau de f.

3. Soit $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$. Calculer $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(f^k)$, la matrice associée à f^k dans la base $\mathscr{B}$. Déterminer le rang de f^k et en déduire $\dim(\operatorname{Ker} f^k)$.

4. Soit $v \notin \operatorname{Ker} f^2$. Montrer que $\mathscr{C} = (f^2(v), -f(v), v)$ est une base de E. Écrire $M' = \operatorname{Mat}_{\mathscr{C}}(f)$, la matrice associée à f dans la base $\mathscr{C}$.

5. Vérifier que $e_3 \notin \operatorname{Ker} f^2$.

6. On désigne par P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{C}$. Déterminer P et P^{-1} lorsque $v = e_3$ en justifiant vos résultats, et vérifier que $M' = P^{-1}MP$.

7. On pose $N = M + I$, où I désigne la matrice identité. Calculer N^n en fonction de M pour $n \in \mathbb{N}$. En déduire l'expression de N^n.

8. Soient $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites réelles définies par récurrence par $p_0 = 0$, $q_0 = 1$, $r_0 = 0$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, par

$$p_n = 3p_{n-1} + q_{n-1},\ q_n = -3p_{n-1} + r_{n-1},\ r_n = p_{n-1}.$$

En considérant le vecteur $X_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix}$, exprimer la relation de récurrence sous forme matricielle et montrer que $X_n = N^n X_0$.

9. Pour tout entier n, déterminer les expressions de p_n, q_n et r_n en fonction de n.