Devoir en temps libre

À rendre le lundi 11/02/2025

■ ■ ■

Exercice 1. Cet exercice s'intéresse à l'étude d'endomorphismes spécifiques de $\mathbb{R}^3$. On note $\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ l'ensemble des endomorphismes de $\mathbb{R}^3$, et si $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$, on rappelle que la puissance n^{e}, $n \in \mathbb{N}$, d'un endomorphisme est définie de la façon suivante :

$$f^n = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}.$$

Un endomorphisme est *nilpotent* s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^p = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)}$. On définit alors *l'indice de nilpotence* p^* de f : $p^* = \min\{p \in \mathbb{N}^* \ ; \ f^p = 0\}$. C'est le plus petit entier positif p tel que f^p est nul.
De même, une matrice $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ est nilpotente s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $M^p = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$ et on définit de manière similaire l'indice de nilpotence d'une matrice nilpotente.
Soit les matrices N_1 et N_2 suivantes de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$:

$$N_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ N_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que N_1 et N_2 sont nilpotentes, et préciser leur indice de nilpotence.

Dans toute la suite du problème, on considère $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ nilpotent non nul et on note p^* son indice de nilpotence.

2. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^3$ tel que $f^{p^*-1}(x_0) \neq 0$.

a) Pourquoi un tel x_0 existe-t-il ?

b) Montrer que $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{p^*-1}(x_0))$ forme une famille libre de $\mathbb{R}^3$.

c) En déduire que $p^* \leqslant 3$.

Dorénavant, et jusqu'à la question **6**, on suppose en plus que $\dim \operatorname{Ker} f = 1$.

3. On veut montrer qu'alors $p^* = 3$. On raisonne par l'absurde et on suppose que $p^* = 2$.

a) Montrer que $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$.

b) En déduire une absurdité et conclure.

4. Exprimer f sous forme matricielle dans la base $\big(x_0, f(x_0), f^2(x_0)\big)$.

5. En déduire que f s'exprime dans une base bien choisie comme N_2.

6. **Bonus.** Montrer que lorsque $\dim \operatorname{Ker} f = 2$, f s'exprime dans une base bien choisie comme N_1.