Devoir en temps libre

À rendre le mardi 17/03/2025

■ ■ ■

Exercice 1. On observe un échantillon X_1, $X_2, \ldots, X_n$ indépendant et identiquement distribué de loi uniforme sur $[0, 2a]$ où a est un réel strictement positif, de densité

$$f_a(x) = \frac{1}{2a} \text{ pour } x \in [0, 2a].$$

Dans ce problème, on étudie deux estimateurs de a.

1. Soit $\hat{a} = \overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$, la moyenne des observations.

a) Calculez l'espérance d'une variable aléatoire de densité f_a.

b) Montrez que $\hat{a}$ est un estimateur sans biais de a.

c) Calculez la variance de $\hat{a}$.

2. Soit $M = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$ l'observation maximale.

a) i. Calculez la fonction de répartition d'une variable aléatoire de densité f_a.

ii. Pour tout $t \geqslant 0$, calculez $\mathbf{P}(M \leqslant t)$.

iii. En déduire la densité de M.

b) i. Pour tout réel c, calculez l'espérance de cM.

ii. En déduire un estimateur sans biais de a, que l'on notera $\widetilde{a}$.

iii. Calculez la variance de $\widetilde{a}$.

3. Conclure : quel est le meilleur estimateur ?