



Exercice 1. Ce problème comporte deux parties, indépendantes entre elles.

Soit a, b, ε trois réels strictement positifs. On définit la fonction $J : \Omega = (\mathbb{R}_+^*)^2 \rightarrow \mathbb{R} :$

$$J(x, y) = ax + by + \varepsilon h(x) + \varepsilon h(y)$$

avec h définie de la façon suivante :

$$h : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x \ln(x) - x$$

Partie I

1. Montrer que la fonction $f : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto ax + \varepsilon h(x)$ est strictement convexe sur \mathbb{R}_+^* .
2. Faire un tableau de variations de la fonction f . Préciser les limites de f en 0 et $+\infty$.
3. Tracer le graphe de f sur \mathbb{R}_+^* .
4. Déterminer son minimum global en justifiant son existence et son unicité.

Partie II

5. Montrer que J est strictement convexe sur Ω . Calculer le minimum de J sur Ω .
6. On cherche maintenant à résoudre le problème sous contraintes :

$$\begin{cases} \min_{(x,y) \in \Omega} J(x, y) \\ x + y = 1 \end{cases} \quad (1.1)$$

On définit le lagrangien $\mathcal{L}(x, y, \lambda)$ du problème (1.1), où λ est le multiplicateur de Lagrange :

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \mapsto J(x, y) - \lambda(x + y - 1).$$

- a) Écrire les équations du premier ordre associées au lagrangien.
- b) On note $(x_\varepsilon^*, y_\varepsilon^*)$ l'éventuelle solution du problème (1.1). Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} x_\varepsilon^* &= e^{(\lambda-a)/\varepsilon} \\ y_\varepsilon^* &= e^{(\lambda-b)/\varepsilon} \end{cases}$$

- c) Expliciter λ . En déduire $(x_\varepsilon^*, y_\varepsilon^*)$ en fonction de a, b, ε .
- d) Montrer que $(x_\varepsilon^*, y_\varepsilon^*)$ est bien solution du problème (1.1).
- e) **Bonus.** Calculer $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (x_\varepsilon^*, y_\varepsilon^*)$. On pourra distinguer les cas $a \geq b$ ou $b \geq a$.