

T.D. I - Suites & Fonctions

I - Suites

I.1 - Suites classiques

Exercice 1. (Suite arithmétique) Soit (u_n) une suite arithmétique. Sachant que $u_{80} = 393$ et $u_{15} = 133$, calculer u_1 .

Exercice 2. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout n entier naturel non nul, $u_{n+1} = \sqrt{4u_n}$.

1. Déterminer u_1, \dots, u_5 en écrivant les résultats sous la forme d'une puissance de 2.
2. Pour tout n entier naturel non nul, on pose $v_n = \ln(u_n) - \ln(4)$. Déterminer la nature de la suite (v_n) et en déduire l'expression de v_n en fonction de n .
3. Donner l'expression de u_n en fonction de n puis en déduire la limite de (u_n) .

Exercice 3. (Une suite arithmético-géométrique) Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et, pour tout n entier naturel, $u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n + 12$.

1. Déterminer la solution ℓ de l'équation $\ell = -\frac{\ell}{2} + 12$.
Pour tout n entier naturel, on pose $v_n = u_n - \ell$.
2. Déterminer la nature de la suite (v_n) .
3. En déduire l'expression de u_n en fonction de n .

Exercice 4. (Une seconde suite arithmético-géométrique) Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et, pour tout n entier naturel, $u_{n+1} = 3u_n + 4$.

1. Déterminer un réel ℓ tel que $\ell = 3\ell + 4$.
2. Pour tout n entier naturel, on pose $v_n = u_n - \ell$. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique.
3. En déduire une expression de u_n en fonction de n puis étudier le comportement asymptotique de (u_n) .

Exercice 5. (Une suite homographique) Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et, pour tout n entier naturel, $u_{n+1} = \frac{2u_n+3}{u_n+4}$.
Pour tout n entier naturel, on pose $v_n = \frac{u_n-1}{u_n+3}$.

1. Déterminer la nature de la suite (v_n) .
2. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n .
3. Déterminer la limite de la suite (u_n) .

I.2 - Sommes des termes

Exercice 6. (Sommes classiques) Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer, en fonction de n les sommes suivantes :

$$\begin{array}{|l|l|l|} \hline 1. \sum_{k=0}^n 1. & 3. \sum_{k=0}^n k. & 5. \sum_{k=0}^n k^3. \\ \hline 2. \sum_{k=1}^n 2. & 4. \sum_{k=0}^n k^2. & \\ \hline \end{array}$$

Exercice 7. (Série harmonique) Pour tout entier naturel n non nul, on pose $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

1. Montrer que la suite (H_n) est monotone. Que peut-on en déduire quant à son comportement lorsque n tend vers $+\infty$?
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}$.
3. En déduire que (H_n) tend vers $+\infty$.

Exercice 8. Soit $q \in]-1, 1[$. On note f la fonction définie pour tout $x \in]-1, 1[$ par $f(x) = \sum_{k=0}^n x^k$.

1. Rappeler l'expression de f sans le signe somme. En déduire l'expression de $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n q^k$.
2. Montrer que f est dérivable et donner deux expressions pour sa dérivée f' .

3. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n kq^{k-1}$.

Exercice 9. Pour tout n entier naturel non nul, on pose $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$.

1. Montrer que, pour tout $k \geq 2$, $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$.
2. Montrer que (S_n) est majorée par 2.
3. En déduire que (S_n) converge.

Exercice 10. (Constante d'Euler) Pour tout n entier naturel non nul, on pose $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

1. Pour tout $x \geq 0$, montrer les inégalités

$$\ln(1+x) \leq x \text{ et } \frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x).$$

2. Montrer que, pour tout $k \geq 1$,

$$\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}.$$

3. En déduire que, pour tout $n \geq 1$,

$$H_{n+1} - 1 \leq \ln(n+1) \leq H_n.$$

4. En déduire que, pour tout $n \geq 1$,

$$\ln(n+1) \leq H_n \leq 1 + \ln(n).$$

Pour tout $n \geq 2$, on pose $c_n = H_{n-1} - \ln(n)$.

5. Calculer $c_{n+1} - c_n$ et en déduire le sens de variation de la suite (c_n) .
6. Montrer que, pour tout $n \geq 2$, $c_n \leq 1 + \ln(n-1) - \ln(n)$.
7. En déduire que la suite (c_n) est convergente.

I.3 - Suites définies par récurrence

Exercice 11. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + e^{-u_n}$.

1. Montrer que (u_n) est croissante.
2. En supposant que (u_n) est majorée, aboutir à une contradiction.
3. En déduire la limite de la suite (u_n) .

Exercice 12. On définit la suite définie par récurrence par $u_0 \geq -1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$. On pose $f : x \mapsto \sqrt{1+x}$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geq 0$.
2. On pose $g : x \mapsto f(x) - x$. Étudier les variations puis le signe de g .
3. On suppose que $u_0 \in \left[-1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$.
 - a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
 - b) En utilisant la fonction g , montrer que (u_n) est croissante.
 - c) En déduire que (u_n) converge et déterminer sa limite.
4. Reprendre les questions précédentes lorsque $u_0 \geq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

I.4 - Suites définies implicitement

Exercice 13. Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Étudier les variations de la fonction $f_n : x \mapsto x^5 + nx - 1$.
2. En déduire qu'il existe un unique réel $u_n \in \mathbb{R}_+$ tel que $u_n^5 + nu_n - 1 = 0$.
3. En étudiant le signe de $f_{n+1}(u_n)$, montrer que la suite (u_n) est décroissante et minorée.
4. En déduire que (u_n) converge et déterminer sa limite.
5. En utilisant la question précédente, étudier la limite de la suite (nu_n) et en déduire un équivalent simple de u_n .
6. On pose $\varepsilon_n = nu_n - 1$. Exprimer ε_n en fonction de n et de u_n et en déduire un équivalent simple de ε_n .

7. En déduire qu'il existe une suite (δ_n) satisfaisant $\lim_{n \rightarrow +\infty} \delta_n = 0$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^6} + \frac{1}{n^6} \delta_n.$$

Exercice 14. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}_+^* par $f(x) = x - \ln x$.

1. Dresser le tableau de variations de f .
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique $u_n \in]0, 1]$ tel que $f(u_n) = n$.
3. Montrer que (u_n) est strictement décroissante et converge vers 0.
4. En utilisant la question précédente, montrer que $u_n \sim e^{-n}$.
5. Montrer que $u_n - e^{-n} = e^{-n}(e^{u_n} - 1)$ et en déduire un équivalent simple de $(u_n - e^{-n})$.
6. En déduire qu'il existe une suite (δ_n) satisfaisant $\lim_{n \rightarrow +\infty} \delta_n = 0$ et telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = e^{-n} + e^{-2n} + e^{-2n} \delta_n$.

II - Fonctions

II.1 - Calculs de développements limités

Exercice 15. Déterminer un équivalent simple en $+\infty$ de chacune des fonctions suivantes :

- | | |
|--|---|
| 1. $f_1(x) = \frac{x^5 + 4x^4 + 2}{2x^3 + x + 1}$. | 9. $f_9(x) = \frac{(3x+12) \ln(1+\frac{1}{x})}{5x^4 + 2}$. |
| 2. $f_2(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$. | 10. $f_{10}(x) = \frac{x}{e^x + e^{-x}}$. |
| 3. $f_3(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$. | 11. $f_{11}(x) = \frac{x^2}{e^x - e^{-x}}$. |
| 4. $f_4(x) = \ln(1 + x^2)$. | 12. $f_{12}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{x^2(e^x - e^{-x})}$. |
| 5. $f_5(x) = \frac{e^{-x} + 3x + 2}{x^2 + 1}$. | 13. $f_{13}(x) = \frac{x^4(e^x + e^{-x})}{e^x - e^{-x}}$. |
| 6. $f_6(x) = \frac{(x^5 + 3x + 1)e^{-x}}{12x + 3}$. | 14. $f_{14}(x) = \frac{\sqrt{x}}{e^x - e^{-x}}$. |
| 7. $f_7(x) = \frac{(x+25) \ln(x)}{e^x + e^{-x}}$. | 15. $f_{15}(x) = \frac{x^3 e^{-2\sqrt{x}}}{1+x^3+x^4}$. |
| 8. $f_8(x) = \frac{\ln(x+1)e^x}{2x+5}$. | |

Exercice 16. Déterminer un équivalent simple en 0 de chacune des fonctions suivantes :

- | | |
|---|--|
| 1. $f_1(x) = \frac{(x^5 + 3x + 1)e^{-x}}{12x + 3}$. | 6. $f_6(x) = \frac{x^2}{e^x - e^{-x}}$. |
| 2. $f_2(x) = \frac{(x+25) \ln(x)}{e^x + e^{-x}}$. | 7. $f_7(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{x^2(e^x - e^{-x})}$. |
| 3. $f_3(x) = \frac{\ln(x+1)e^x}{2x+5}$. | 8. $f_8(x) = \frac{x^4(e^x + e^{-x})}{e^x - e^{-x}}$. |
| 4. $f_4(x) = \frac{(3x+12) \ln(1+\frac{1}{x})}{5x^4 + 2}$. | 9. $f_9(x) = \frac{\sqrt{x}}{e^x - e^{-x}}$. |
| 5. $f_5(x) = \frac{x}{e^x + e^{-x}}$. | |

Exercice 17. (Calculs de limites en 0) Déterminer les limites 0 des fonctions suivantes :

- | | |
|---------------------------------------|--|
| 1. $\frac{\ln(1+2x)}{\sqrt{x}-1}$. | 4. $\frac{\ln(1+2x)}{\sqrt{1+2x}-1}$. |
| 2. $\frac{\ln(1+2x)}{\sqrt{1+x}-1}$. | 5. $\frac{e^{3x}-1-3x}{x^2}$. |
| 3. $\frac{e^x-1}{x}$. | |

Exercice 18. Déterminer un équivalent en 1 de chacune des fonctions suivantes :

- | | |
|---|--|
| 1. $f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$. | 4. $f_4(x) = \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$. |
| 2. $f_2(x) = \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x^2-1}}$. | 5. $f_5(x) = \frac{\ln(1-x)}{\sqrt{x^2-1}}$. |
| 3. $f_3(x) = \frac{\ln(x)}{\sqrt{x^2-1}}$. | |

Exercice 19. (Calculs de limites en $+\infty$) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer

- | | |
|--|--|
| 1. $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + \frac{\alpha}{n})^n$. | 2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(e^{3/x} - 1)$. |
|--|--|

Exercice 20. (Calculs de développements limités) Déterminer le développement limité, à l'ordre 2, en 0 de :

- | | |
|--------------------------|-------------------------------|
| 1. $\frac{e^x - 1}{x}$. | 2. $\frac{1}{1 + \ln(1+x)}$. |
|--------------------------|-------------------------------|

II.2 - Étude de courbes

Exercice 21. (Inégalités classiques)

1. Démontrer puis représenter graphiquement les inégalités suivantes :

a) $\forall u \in]-1, +\infty[, \ln(1+u) \leq u.$

b) $\forall u \in \mathbb{R}, 1+u \leq e^u.$

2. Montrer que $\forall u \geq 0, u - \frac{u^2}{2} \leq \ln(1+u).$

Exercice 22. (e^π ou π^e ?)

1. Étudier la fonction $x \mapsto \frac{\ln x}{x}.$

2. Sans calculatrice, parmi les réels e^π et π^e , lequel est le plus petit ?

Exercice 23. Déterminer l'équation de la tangente ainsi que la position (locale) de la courbe représentative par rapport à cette tangente aux points précisés :

1. e^x en 0.

2. e^x en 2.

3. $\ln(x)$ en 1.

4. $x e^x$ en 0.

5. $\frac{e^x-1}{x}$ en 0.

Exercice 24. On considère la fonction $f : x \mapsto x + \sqrt{x^2 - 1}.$

1. Déterminer le domaine de définition \mathcal{D} de $f.$

2. Étudier les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty.$

3. Montrer que, pour tout $x \in D \setminus \{-1, 1\}, f'(x)$ et $f(x)$ sont de même signe.

4. Déterminer les variations de f sur $[1, +\infty[.$

5. Montrer que, pour tout $x \in D, f(x)f(-x) = -1$ et en déduire les variations de f sur $] -\infty, -1].$

6. On note \mathcal{C}_f la courbe représentative de $f.$ Montrer que la droite Δ d'équation $y = 2x$ est asymptote à \mathcal{C}_f en $+\infty.$

7. Tracer \mathcal{C}_f et $\Delta.$

II.3 - Équations fonctionnelles

Exercice 25. (Isométries de \mathbb{R}) Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} et à valeurs réelles telle que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |f(x) - f(y)| = |x - y|.$$

1. Montrer qu'il existe une fonction $\varepsilon : \mathbb{R} \rightarrow \{-1, 1\}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \varepsilon(x) \cdot x + f(0).$$

2. Soit x un réel non nul. En calculant de deux manières $(f(x) - f(1))^2,$ montrer que $\varepsilon(x)\varepsilon(1) = 1.$ En déduire que $\varepsilon(x) = \varepsilon(1).$

3. En déduire l'ensemble des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} qui satisfont la relation :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, |f(x) - f(y)| = |x - y|.$$

Exercice 26. Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} et à valeurs réelles telle que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x)f(y) = f(x) + f(y).$$

1. Montrer que $f(0) \in \{0, 2\}.$

2. Si $f(0) = 0,$ montrer que f est la fonction nulle.

3. Si $f(0) = 2,$ montrer que f est la fonction constante égale à 2.

4. En déduire l'ensemble des fonctions f qui satisfont la relation :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x)f(y) = f(x) + f(y).$$

Exercice 27. Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} et à valeurs réelles telle que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x+y) = f(x) + f(y).$$

1. Montrer que $f(0) = 0.$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(nx) = nf(x)$.
3. En déduire que, si f est une fonction bornée, alors f est la fonction nulle.
4. Montrer que f est une fonction impaire.
5. Montrer que, pour tout n entier naturel,

$$f(n) = nf(1) \text{ et } f(-n) = -nf(1).$$

6. Montrer que, pour tout $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, $f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p}{q}f(1)$.
7. On suppose que, pour tout x réel, il existe deux suites d'entiers $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{p_n}{q_n} = x$.
Montrer que, si f est une fonction continue, alors $f(x) = xf(1)$.