T.D. V - Estimation

I - Construction d'estimateurs

Exercice 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in [0,1]$ et X suivant une loi de Bernoulli de paramètre p. On note $(X_1, \ldots, X_n)$ un n-échantillon de X et $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.

1. Déterminer la loi de la variable aléatoire $Y_n = n\overline{X}_n$.

2. Exprimer $\mathbf{E}[Y_n]$, $\mathbf{V}(Y_n)$ et $\mathbf{E}\left[Y_n^2\right]$ en fonction de n et de p.

3. $\overline{X}_n^2$ est-il un estimateur sans biais de p^2 ? Sinon, proposer un estimateur sans biais de p^2.

Exercice 2. (Estimation de la variance) Soit X une variable aléatoire qui admet une espérance m et une variance σ^2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(X_1, \ldots, X_n)$ un n-échantillon de X. On pose $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ et $s_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2$.

1. Montrer que $\overline{X}_n$ est un estimateur sans biais de m.

2. Montrer que $\mathbf{V}\left(\overline{X}_n\right) = \frac{\sigma^2}{n}$.

3. Montrer que $s_n = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right) - \overline{X}_n^2$ puis que $\mathbf{E}[s_n] = \frac{n-1}{n}\sigma^2$.

4. La variable aléatoire s_n est-elle un estimateur sans biais de σ^2 ?

5. Montrer que $S_n = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}_n\right)^2$ est un estimateur sans biais de σ^2.

Exercice 3. Soit $N \geqslant 2$. Une urne contient N boules numérotées de 1 à N. On effectue n tirages indépendants avec remise. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on note X_k le numéro de la boule tirée au k^{e} tirage. Enfin, on pose :

$$M_n = \max\{X_1, \ldots, X_n\}.$$

1. Montrer que, pour tout $i \in [\![1, N]\!]$,

$$\mathbf{P}([M_n \leqslant i]) = \left(\frac{i}{N}\right)^n.$$

2. Déterminer $\mathbf{P}([M_n = N])$ puis $\lim_{n \to +\infty} \mathbf{P}([M_n = N])$.

3. Montrer que si Y est une variable aléatoire à valeurs dans $[\![1, N]\!]$, alors $\mathbf{E}[Y] = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{P}([Y \geqslant i])$.

4. En déduire que $\mathbf{E}[M_n] = N - \sum_{k=0}^{N-1}\left(\frac{k}{N}\right)^n$.

5. Montrer que $N - N\left(1 - \frac{1}{N}\right)^n \leqslant \mathbf{E}[M_n] \leqslant N$ puis déterminer la limite de $\mathbf{E}[M_n]$ lorsque n tend vers l'infini.
L'estimateur M_n est un estimateur *asymptotiquement sans biais* de N.

II - Comparaison d'estimateurs

Exercice 4. Soit $\lambda > 0$ et X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ. Pour estimer ce paramètre, on considère un n-échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ de X. On considère les deux estimateurs de λ suivants :

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \text{ et } T_n = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2.$$

1. Ces estimateurs sont-ils biaisés ?

2. Calculer le risque quadratique de $\overline{X}_n$.

3. On admet que le risque quadratique de T_n vaut $\frac{\lambda}{n} + \frac{2\lambda^2}{n-1}$. Lequel de ces deux estimateurs vous semble préférable ?

Exercice 5. Soit $\theta \neq 0$, X une variable aléatoire discrète telle que $\mathbf{E}[X] = \theta$ et $\mathbf{V}(X) = 1$. On dispose d'un n-échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ de X et on pose $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.

1. Montrer que $\overline{X}_n$ est un estimateur sans biais de θ et calculer son risque quadratique.

2. Soit $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in (\mathbb{R}^*)^n$. On note $Y_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que Y_n soit un estimateur sans biais de θ. On suppose ensuite cette condition vérifiée.

3. Calculer $\text{Cov}\left(\overline{X}_n, Y_n\right)$. En déduire que $\mathbf{V}\left(\overline{X}_n\right) \leqslant \mathbf{V}\left(Y_n\right)$. Que dire en cas d'égalité ?

4. Interpréter les résultats obtenus.