

# T.D. X - Réduction

## I - Diagonalisation

**Exercice 1.** Sans effectuer de calcul, déterminer si les matrices suivantes sont diagonalisables :

$1. A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$	$3. A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$
$2. A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$	$4. A_4 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$

**Exercice 2.** Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ .

1. Déterminer les réels  $\lambda$  tels que  $A - \lambda I_2$  ne soit pas inversible.
2. La matrice  $A$  est-elle diagonalisable ?
3. Déterminer une matrice  $P$  inversible et une  $D$  diagonale telles que  $A = PDP^{-1}$ .

**Exercice 3.** Soit  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

1. Déterminer les réels  $\lambda$  tels que  $A - \lambda I_2$  ne soit pas inversible.
2. La matrice  $A$  est-elle diagonalisable ?

**Exercice 4.** Soit  $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ . Déterminer l'ensemble des matrices diagonalisables qui ont pour unique valeur propre  $\lambda_0$ .

**Exercice 5.** Soient  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $X_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$  et

$$X_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que  $X_1$ ,  $X_2$  et  $X_3$  sont des vecteurs propres de  $A$ .

2. Montrer que  $A$  est diagonalisable puis déterminer une matrice  $P$  inversible et une matrice  $D$  diagonale telles que  $A = PDP^{-1}$ .

**Exercice 6.** Soit  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

1. Montrer sans calculs que  $A$  est diagonalisable.
2. Diagonaliser la matrice  $A$ .

## II - Réduction & Application

**Exercice 7.** Soit  $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

1. Montrer que  $A$  admet une unique valeur propre. La matrice  $A$  est-elle diagonalisable ?
2. Déterminer une base du sous-espace propre de  $A$  associé à son unique valeur propre.

On note  $f$  l'endomorphisme canoniquement associé à  $A$  ainsi que

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Recherche d'une base adaptée.
  - a) Déterminer un vecteur non nul  $e_1$  tel que  $f(e_1) = 2e_1$ .
  - b) Déterminer un vecteur  $e_2 = (a, b, -1)$  tel que  $f(e_2) = e_1 + 2e_2$ .
  - c) Déterminer un vecteur  $e_3 = (c, d, 2)$  tel que  $f(e_3) = e_2 + 2e_3$ .
  - d) Montrer que  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$  puis déterminer  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ .

On note  $P$  la matrice de passage de la base canonique à la base  $\mathcal{B}$ .

4. Déterminer  $P^{-1}$ .

5. En utilisant la formule du binôme de Newton, pour tout  $n$  entier naturel, déterminer  $T^n$ .

6. En déduire les coefficients de  $A^n$ .

**Exercice 8.** Soient  $(u_n)$ ,  $(v_n)$  et  $(w_n)$  trois suites définies par  $u_0 = 1$ ,  $v_0 = -1$ ,  $w_0 = 2$  et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} &= -3u_n + 4v_n - w_n \\ v_{n+1} &= 2v_n \\ w_{n+1} &= -4v_n - 2w_n \end{cases}.$$

1. Pour tout  $n$  entier naturel, exprimer  $v_n$  en fonction de  $n$ .

On pose  $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix}$ .

2. Déterminer les réels  $\lambda$  tels que  $A - \lambda I_3$  ne soit pas inversible.

3. Montrer que  $A$  est diagonalisable et déterminer une matrice inversible  $P$  et une matrice diagonale  $D$  telle que  $A = PDP^{-1}$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

4. En déduire par récurrence que, une expression de  $A^n$  en fonction de  $D^n$ ,  $P^{-1}$  et  $P$ .

5. Déterminer  $D^n$  et en déduire les 9 coefficients de  $A^n$ .

Pour tout  $n$  entier naturel, on pose  $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ .

6. Montrer que, pour tout  $n$  entier naturel,  $U_{n+1} = AU_n$ .

7. Montrer par récurrence que, pour tout  $n$  entier naturel,  $U_n = A^n U_0$ .

8. En déduire les expressions de  $u_n$ ,  $v_n$  et  $w_n$ .

**Exercice 9.** Soient  $A = \begin{pmatrix} -5 & 1 & -8 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 7 \end{pmatrix}$  et  $R(X) = X^3 - 4X^2 + X + 6$ .

1. Montrer que  $A^3 - 4A^2 + A + 6I_3 = 0_3$ .

2. En déduire que  $A$  est inversible et déterminer  $A^{-1}$ .

3. Calculer  $R(2)$  puis déterminer un polynôme  $Q$  tel que  $R(X) = (X - 2)Q(X)$ .

4. En déduire les valeurs propres possibles de la matrice  $A$ .

5. Déterminer les valeurs propres de  $A$  ainsi que les sous-espaces propres associés.

6. En déduire que  $A$  est diagonalisable.