T.D. VII - Applications linéaires

I - Applications linéaires

Solution de l'exercice 1.

1. Soit $u = (x_1, y_1, z_1)$, $v = (x_2, y_2, z_2)$ des éléments de $\mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors,

$$\begin{aligned}
f_1(u+\lambda v) &= f_1(x_1+\lambda x_2, y_1+\lambda y_2, z_1+\lambda z_2)\\
&= (-(x_1+\lambda x_2)+2(y_1+\lambda y_2), 2(x_1+\lambda x_2)-3(y_1+\lambda y_2)+(z_1+\lambda z_2))\\
&= (-x_1+2y_1, 2x_1-3y_1+z_1)+\lambda(-x_2+2y_2, 2x_2-3y_2+z_2)\\
&= f_1(u)+\lambda f_1(v).
\end{aligned}$$

Ainsi, f_1 est une application linéaire.

$(x, y, z) \in \operatorname{Ker} f_1$ si et seulement si $f_1(x, y, z) = (0, 0)$ si et seulement si

$$\begin{cases} -x+2y &= 0 \\ 2x-3y+z &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x+2y &= 0 \\ y+z &= 0 \quad {\scriptstyle L_2 \leftarrow 2L_1+L_2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists\, \lambda \in \mathbb{R}\ ;\ \begin{cases} x &= -2\lambda \\ y &= -\lambda \\ z &= \lambda \end{cases}$$

Ainsi, $\operatorname{Ker} f_1 = \operatorname{Vect}\{(-2, -1, 1)\}$.

Comme $\dim \operatorname{Ker} f_1 = 1$, d'après le théorème du rang,

$$\operatorname{Rg}(f) = 3 - \dim \operatorname{Ker} f = 2.$$

Comme $\operatorname{Im} f_1 \subset \mathbb{R}^2$ et $\dim(\operatorname{Im} f_1) = \dim \mathbb{R}^2$, alors $\operatorname{Im} f_1 = \mathbb{R}^2$. L'application f_1 est surjective.

2e Méthode.

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im}(f) &= \operatorname{Vect}\{f_1(1,0,0),\ f_1(0,1,0),\ f_1(0,0,1)\}\\
&= \operatorname{Vect}\{(-1,2),(2,-3),(0,1)\}\\
&= \operatorname{Vect}\{(-1,0),(2,0),(0,1)\}\\
&= \operatorname{Vect}\{(1,0),(0,1)\} = \mathbb{R}^2.
\end{aligned}$$

2. Soit $u = (x_1, y_1, z_1)$, $v = (x_2, y_2, z_2)$ des éléments de $\mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors,

$$\begin{aligned}
f_2(u+\lambda v) &= f_2(x_1+\lambda x_2, y_1+\lambda y_2, z_1+\lambda z_2)\\
&= (2(x_1+\lambda x_2)+(y_1+\lambda y_2)-(z_1+\lambda z_2), (x_1+\lambda x_2)-(y_1+\lambda y_2)+3(z\\
&= (2x_1+y_1-z_1, x_1-y_1+3z_1, 4x_1+y_1-z_1)+\lambda(2x_2+y_2-z_2, x_2-y\\
&= f_2(u)+\lambda f_2(v).
\end{aligned}$$

Ainsi, f_2 est une application linéaire.

$(x, y, z) \in \operatorname{Ker} f_2$ si et seulement si $f_2(x, y, z) = (0, 0)$ si et seulement si

$$\begin{cases} 2x+y-z &= 0 \\ x-y+3z &= 0 \\ 4x+y-z &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y+3z &= 0 \quad {\scriptstyle L_1 \leftarrow L_2} \\ 2x+y-z &= 0 \quad {\scriptstyle L_2 \leftarrow L_1} \\ 4x+y-z &= 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-y+3z &= 0 \\ 2y-7z &= 0 \quad {\scriptstyle L_2 \leftarrow L_2-2L_1} \\ 5y-13z &= 0 \quad {\scriptstyle L_3 \leftarrow L_3-4L_1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x &= 0 \\ y &= 0 \\ z &= 0 \end{cases}$$

Ainsi, $\operatorname{Ker} f_2 = \operatorname{Vect}\{0_{\mathbb{R}^3}\}$. L'application f_2 est donc injective.

Comme $\dim \operatorname{Ker} f_2 = 3$, d'après le théorème du rang,

$$\operatorname{Rg}(f) = 3 - \dim \operatorname{Ker} f = 3.$$

Comme $\operatorname{Im} f_2 \subset \mathbb{R}^3$ et $\dim(\operatorname{Im} f_2) = \dim \mathbb{R}^3$, alors $\operatorname{Im} f_2 = \mathbb{R}^3$. L'application f_2 est donc surjective.
Ainsi, f_2 est une application linéaire bijective soit un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

2e Méthode.

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im}(f) &= \operatorname{Vect}\{f_2(1,0,0),\ f_2(0,1,0),\ f_2(0,0,1)\}\\
&= \operatorname{Vect}\{(2,1,4),(1,-1,1),(-1,3,-1)\}\\
&= \operatorname{Vect}\{(0,-2,6),(1,-1,1),(0,2,0)\}\\
&= \operatorname{Vect}\{(0,0,6),(1,-1,1),(0,1,0)\}\\
&= \operatorname{Vect}\{(0,0,1),(1,0,0),(0,1,0)\} = \mathbb{R}^3.
\end{aligned}$$

3. Soit $u = (x_1, y_1, z_1)$, $v = (x_2, y_2, z_2)$ des éléments de $\mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors,

$$\begin{aligned} f_3(u+\lambda v) &= f_3(x_1+\lambda x_2, y_1+\lambda y_2, z_1+\lambda z_2) \\ &= ((y_1+\lambda y_2)+(z_1+\lambda z_2), (x_1+\lambda x_2)+(y_1+\lambda y_2)+(z_1+\lambda z_2), x_1+\lambda x_2) \\ &= (y_1+z_1, x_1+y_1+z_1, x_1)+\lambda(y_2+z_2, x_2+y_2+z_2, x_2) \\ &= f_3(u)+\lambda f_3(v). \end{aligned}$$

Ainsi, f_3 est une application linéaire.

$(x, y, z) \in \operatorname{Ker} f_3$ si et seulement si $f_3(x, y, z) = (0, 0)$ si et seulement si

$$\begin{cases} y+z &= 0 \\ x+y+z &= 0 \\ z &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \exists\, \lambda \in \mathbb{R} \;;\; \begin{cases} y &= \lambda \\ z &= -\lambda \\ x &= 0 \end{cases}.$$

Ainsi, $\operatorname{Ker} f_3 = \operatorname{Vect}\{(0, 1, -1)\}$.

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(f) &= \operatorname{Vect}\{f_3(1,0,0),\ f_3(0,1,0),\ f_3(0,0,1)\} \\ &= \operatorname{Vect}\{(0,1,1),(1,1,0),(1,1,0)\} \qquad = \operatorname{Vect}\{(0,1,1),(1,1,0)\}. \end{aligned}$$

4. On remarque que si $u = (1, 0, 1)$, alors

$$f_4(2u) = f_4(2,0,2) = 2(2,2) = 4(1,1)$$

et

$$2f_4(u) = 2f_4(1,0,1) = 2 \times 1(1,1) = 2(1,1)$$

Ainsi, $f_4(2u) \neq 2f_4(u)$ et la fonction f_4 n'est pas linéaire.

5. Soit $u = (x_1, y_1, z_1)$, $v = (x_2, y_2, z_2)$ des éléments de $\mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors,

$$\begin{aligned} f_5(u+\lambda v) &= f_5(x_1+\lambda x_2, y_1+\lambda y_2, z_1+\lambda z_2) \\ &= 2((x_1+\lambda x_2)+(y_1+\lambda y_2)+(z_1+\lambda z_2), (x_1+\lambda x_2)-(y_1+\lambda y_2)) \\ &= 2(x_1+y_1+z_1, x_1-y_1)+\lambda 2(x_2+y_2+z_2, x_2-y_2) \\ &= f_5(u)+\lambda f_5(v). \end{aligned}$$

Ainsi, f_5 est une application linéaire.

$(x, y, z) \in \operatorname{Ker} f_5$ si et seulement si $f_5(x, y, z) = (0, 0)$ si et seulement si

$$\begin{cases} 2(x+y+z) &= 0 \\ 2(x-y) &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z &= 0 \\ x-y &= 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists\, \lambda \in \mathbb{R} \;;\; \begin{cases} x &= \lambda \\ y &= \lambda \\ z &= -2\lambda \end{cases}$$

Ainsi, $\operatorname{Ker} f_5 = \operatorname{Vect}\{(1, 1, -2)\}$.

Comme $\dim \operatorname{Ker} f_5 = 1$, d'après le théorème du rang,

$$\operatorname{Rg}(f) = 3 - \dim \operatorname{Ker} f = 2.$$

Comme $\operatorname{Im} f_5 \subset \mathbb{R}^2$ et $\dim(\operatorname{Im} f_5) = \dim \mathbb{R}^2$, alors $\operatorname{Im} f_5 = \mathbb{R}^2$. L'application f_5 est surjective.

2e Méthode.

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(f) &= \operatorname{Vect}\{f_5(1,0,0),\ f_5(0,1,0),\ f_5(0,0,1)\} \\ &= \operatorname{Vect}\{(2,2),(2,-2),(2,0)\} \\ &= \operatorname{Vect}\{(0,2),(0,-2),(1,0)\} \\ &= \operatorname{Vect}\{(1,0),(0,1)\} = \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

□

Solution de l'exercice 2. Raisonnons par double implication.

($\Rightarrow$) Supposons que $g \circ f = 0$. Montrons que $\operatorname{Im}(f) \subset \operatorname{Ker}(g)$.
Soit $y \in \operatorname{Im}(f)$. Il existe $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $y = f(x)$. Ainsi,

$$g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x) = 0$$

et $y \in \operatorname{Ker}(g)$.
Donc, $\operatorname{Im}(f) \subset \operatorname{Ker}(g)$.

($\Leftarrow$) Supposons que $\operatorname{Im}(f) \subset \operatorname{Ker}(g)$. Montrons que $g \circ f = 0$.
Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Alors, $f(x) \in \operatorname{Im}(f)$, donc $f(x) \in \operatorname{Ker}(g)$ et

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 0.$$

Ainsi, $g \circ f = 0$.

□

Solution de l'exercice 3. Comme f est une application linéaire, alors $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$. Ainsi, $\dim \mathrm{Im}(f) \leqslant 1$.
Comme f n'est pas l'application nulle, alors $\mathrm{Im}(f) \neq \{0\}$, donc $\dim \mathrm{Im}(f) \geqslant 1$.
Finalement, $\dim \mathrm{Im}(f) = 1$ et $\mathrm{Im}(f) \subset \mathbb{R}$, donc $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$.
Ainsi, f est une application surjective.

2e méthode. Comme f n'est pas l'application linéaire nulle, il existe $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $y_0 = f(x_0) \neq 0$.
Soit $y \in \mathbb{R}$. Alors, comme y_0 est non nul,

$$\begin{aligned} y &= \frac{y}{y_0} y_0 \\ &= \underbrace{\frac{y}{y_0}}_{\in\mathbb{R}} f(x_0) \\ &= f\left(\underbrace{\frac{y}{y_0} x_0}_{\in\mathbb{R}^n}\right), \text{ car } f \text{ est linéaire.} \end{aligned}$$

Ainsi, y possède un antécédent par f et la fonction f est surjective. □

Solution de l'exercice 4.

1. D'après la définition, la famille $(e_i, f(e_i))$ est liée. Ainsi, il existe $(\alpha_i, \beta_i) \neq (0,0)$ tel que

$$\alpha_i e_i + \beta_i f(e_i) = \overrightarrow{0_3}.$$

Supposons par l'absurde que $\beta_i = 0$. Alors, $\alpha_i \neq 0$ et $\alpha_i e_i = \overrightarrow{0_3}$, soit $e_i = \overrightarrow{0_3}$. Ceci est impossible car e_i est un vecteur de la base canonique.
Ainsi, $\beta_i \neq 0$ et $f(e_i) = -\frac{\alpha_i}{\beta_i} e_i$.

2. Comme $(e_i + e_j, f(e_i + e_j))$ est liée et $e_i + e_j \neq \overrightarrow{0_3}$, en effectuant le même raisonnement qu'à la question précédente, il existe $a_{i,j} \in \mathbb{R}$ tel que

$$f(e_i + e_j) = a_{i,j}(e_i + e_j).$$

3. Comme la fonction f est linéaire, en utilisant les questions précédentes,

$$\begin{aligned} f(e_i + e_j) &= f(e_i) + f(e_j) \\ a_{i,j}(e_i + e_j) &= a_i e_i + a_j e_j \\ (a_{i,j} - a_i)e_i + (a_{i,j} - a_j)e_j &= \overrightarrow{0_3}. \end{aligned}$$

Pour $i \neq j$, comme (e_i, e_j) est une famille libre alors

$$\begin{cases} a_{i,j} - a_i &= 0 \\ a_{i,j} - a_j &= 0 \end{cases}$$

soit $a_i = a_{i,j} = a_j$ et $a_i = a_j$. Notons

$$a = a_1 = a_2 = a_3.$$

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Comme f est linéaire,

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= f(xe_1 + ye_2 + ze_3) \qquad = xf(e_1) + yf(e_2) + zf(e_3) \\ &= xae_1 + yae_2 + zae_3 \\ &= a(xe_1 + ye_2 + ze_3) \\ &= a(x,y,z). \end{aligned}$$

Ainsi, $f = a\,\mathrm{Id}$. □

Solution de l'exercice 5.

1. Soit $x \in \mathrm{Ker}\, u^k$. Alors,

$$\begin{aligned} u^k(x) &= \overrightarrow{0_n} \\ u\left(u^k(x)\right) &= u\left(\overrightarrow{0_n}\right) \\ u^{k+1}(x) &= \overrightarrow{0_n}. \end{aligned}$$

Donc $u \in \mathrm{Ker}\, u^{k+1}$.

2. D'après la question précédente, $d_k \leqslant d_{k+1}$. Ainsi, la suite (d_k) est croissante.
De plus, comme $\mathrm{Ker}\, u^k \subset \mathbb{R}^n$, alors $d_k \leqslant n$.

Ainsi, la suite (d_k) est croissante et majorée par n.
D'après le théorème de la limite monotone, la suite (d_k) converge.

3. D'après la définition de p,

$$\begin{cases} d_{p-1} & \neq d_p \\ d_k & = d_p, \ \forall\ k \geqslant p \end{cases}$$

Comme $\operatorname{Ker} u^{p-1} \subset \operatorname{Ker} u^p$ et $d_{p-1} \neq d_p$, alors

$$\operatorname{Ker} u^{p-1} \neq \operatorname{Ker} u^p.$$

Soit $k \geqslant p$. Comme $\operatorname{Ker} u^p \subset \operatorname{Ker} u^k$ et $d_k = d_p$, alors

$$\operatorname{Ker} u^k = \operatorname{Ker} p.$$

□

II - Applications linéaires & Matrices

Solution de l'exercice 6.

1. Comme

$$\begin{aligned} f(1,0) &= (1,3) = 1 \cdot (1,0) + 3 \cdot (0,1), \\ f(0,1) &= (1,-5) = 1 \cdot (1,0) - 5 \cdot (0,1), \end{aligned}$$

alors

$$\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}.$$

2. Comme

$$\begin{aligned} f(0,1) &= (1,-5) = -5 \cdot (0,1) + 1 \cdot (1,0), \\ f(1,0) &= (1,3) = 3 \cdot (0,1) + 1 \cdot (1,0), \end{aligned}$$

alors

$$\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. D'une part,

$$\begin{aligned} f(1,2) &= (4,-1) \\ f(3,4) &= (10,-1). \end{aligned}$$

D'autre part, la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base canonique vaut

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $P\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -19/2 \\ 9/2 \end{pmatrix}$ et $P\begin{pmatrix} 10 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -43/2 \\ 21/2 \end{pmatrix}$. Donc

$$\begin{aligned} f(1,2) &= -\frac{19}{2}(1,2) + \frac{9}{2}(3,4) \\ f(3,4) &= -\frac{43}{2}(1,2) + \frac{21}{2}(3,4). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -19 & -43 \\ 9 & 21 \end{pmatrix}.$$

2ᵉ Méthode. D'une part, si $(x,y) = \alpha(1,2) + \beta(3,4)$, alors

$$\begin{cases} \alpha + 3\beta & = x \\ 2\alpha + 4\beta & = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + 3\beta & = x \\ -2\beta & = y - 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha & = -2x + \frac{3}{2}y \\ \beta & = x - \frac{1}{2}y \end{cases}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} f(1,2) = (4,-1) &= \left(-8 - \frac{3}{2}\right)(1,2) + \left(4 + \frac{1}{2}\right)(3,4) \\ &= -\frac{19}{2}(1,2) + \frac{9}{2}(3,4) \\ f(3,4) = (10,-1) &= \left(-20 - \frac{3}{2}\right)(1,2) + \left(10 + \frac{1}{2}\right)(3,4) \\ &= -\frac{43}{2}(1,2) + \frac{21}{2}(3,4), \end{aligned}$$

et on retrouve le résultat précédent.

4. Comme

$$\begin{aligned} f(1,0,0) &= (1,3,0) = (1,0,0) + 3(0,1,0) + 0(1,1,1), \\ f(0,1,0) &= (1,0,1) = 0 \cdot (1,0,0) - (0,1,0) + (1,1,1), \\ f(1,1,1) &= (2,2,1) = (1,0,0) + (0,1,0) + (1,1,1), \end{aligned}$$

alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

Solution de l'exercice 7. En utilisant les définitions,

$$\begin{aligned} f(1,2,1) &= (7,4,5), \\ f(2,3,3) &= (13,9,15), \\ f(3,7,1) &= (21,16,5). \end{aligned}$$

D'autre part, si $(x,y,z) = \alpha(3,1,4) + \beta(5,3,2) + \gamma(1,-1,7)$, alors

$$\begin{cases} x &= 3\alpha + 5\beta + \gamma \\ y &= \alpha + 3\beta - \gamma \\ z &= 4\alpha + 2\beta + 7\gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + 3\beta - \gamma &= y \\ 3\alpha + 5\beta + \gamma &= x \\ 4\alpha + 2\beta + 7\gamma &= z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + 3\beta - \gamma &= y \\ -4\beta + 4\gamma &= x - 3y \\ -10\beta + 11\gamma &= z - 4y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + 3\beta - \gamma &= y \\ -4\beta + 6\gamma &= x - 3y \\ -2\gamma &= 5x - 7y - 2z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha &= \frac{23}{4}x - \frac{33}{4}y - 2z \\ \beta &= -\frac{11}{4}x + \frac{17}{4}y + z \\ \gamma &= -\frac{5}{2}x + \frac{7}{2}y + z \end{cases}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} f(1,2,1) &= -\frac{11}{4}(3,1,4) + \frac{11}{4}(5,3,2) + \frac{3}{2}(1,-1,7) \\ f(2,3,3) &= -\frac{59}{2}(3,1,4) + \frac{35}{2}(5,3,2) + 14(1,-1,7) \\ f(3,7,1) &= -\frac{85}{4}(3,1,4) + \frac{61}{4}(5,3,2) + \frac{17}{2}(1,-1,7). \end{aligned}$$

Finalement,

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}_1}(f) = \begin{pmatrix} -\frac{11}{4} & -\frac{59}{2} & -\frac{85}{4} \\ \frac{11}{4} & \frac{35}{2} & \frac{61}{4} \\ \frac{3}{2} & 14 & \frac{17}{2} \end{pmatrix}.$$

□

Solution de l'exercice 8. D'après la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$,

$$\begin{aligned} f(e_1) &= 3e_2 + e_3, \\ f(e_2) &= e_1 + 5e_2, \\ f(e_3) &= 2e_1 + 4e_2 + 3e_3. \end{aligned}$$

En réordonnant ces expressions,

$$\begin{aligned} f(e_3) &= 3e_3 + 4e_2 + 2e_1, \\ f(e_2) &= 5e_2 + e_1, \\ f(e_1) &= e_3 + 3e_2. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

Solution de l'exercice 9.

1. D'après les propriétés des matrices,

$$\begin{aligned} \mathrm{Rg}(u) = \mathrm{Rg}(A) &= \mathrm{Rg}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -4 & -3 & -1 \\ -4 & -2 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \mathrm{Rg}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \mathrm{Rg}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2. \end{aligned}$$

2. $(x, y, z) \in \operatorname{Ker} u$ si et seulement si

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 3x+2y+z & =0 \\ -4x-3y-z & =0 \\ -4x-2y-2z & =0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+2y+z & =0 \\ -x-y & =0 \quad {\scriptstyle L_2 \leftarrow L_2+L_1} \\ 2x+2y & =0 \quad {\scriptstyle L_3 \leftarrow L_3+2L_1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x+2y+z & =0 \\ -x-y & =0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda \in \mathbb{R}\ ;\ \begin{cases} x & =\lambda \\ y & =-\lambda \\ z & =-\lambda \end{cases}$$

Ainsi,

$$\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}\{(1,-1,-1)\}.$$

De plus,

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(u) &= \operatorname{Vect}\{(3,-4,-4),(2,-3,-2),(1,-1,-2)\} \\ &= \operatorname{Vect}\{(0,-1,2),(0,-1,2),(1,-1,-2)\} \\ &= \operatorname{Vect}\{(0,-1,2),(1,-1,-2)\}. \end{aligned}$$

Posons

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= (1,-1,-1), \\ \varepsilon_2 &= (0,-1,2), \\ \varepsilon_3 &= (1,-1,-2). \end{aligned}$$

Montrons que $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Comme il s'agit d'une famille de vecteurs il suffit de montrer qu'elle est libre. Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\begin{aligned} \alpha\varepsilon_1 + \beta\varepsilon_2 + \gamma\varepsilon_3 &= 0_{\mathbb{R}^3} \\ \alpha u(\varepsilon_1) + \beta u(\varepsilon_2) + \gamma u(\varepsilon_3) &= 0_{\mathbb{R}^3} \\ \beta(0,1,-2) + \gamma(-1,1,2) &= (0,0,0) \end{aligned}$$

Ainsi, $\beta = \gamma = 0$. On en déduit que $\alpha = 0$ et que la famille est libre. Ainsi, $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

3. D'après la définition de $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$,

$$P = P_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

4. D'après les définitions précédentes,

$$\begin{aligned} u(\varepsilon_1) &= (0,0,0) \\ u(\varepsilon_2) &= (0,1,-2) = -\varepsilon_2 \\ u(\varepsilon_3) &= (-1,1,2) = -\varepsilon_3 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

5. D'après les formules de changement de base,

$$\begin{aligned} \operatorname{Mat}_{\mathscr{C}}(u) &= P_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}} \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(u) P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{C}} \\ A &= PBP^{-1}. \end{aligned}$$

6. Comme B est une matrice diagonale, alors pour tout n entier naturel,

$$B^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}.$$

7. En utilisant la méthode de Gauss-Jordan,

$$P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{C}} = \left(P_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
A^n = \left(PBP^{-1}\right)^n &= PB^nP^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \\
&= (-1)^n \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \\
&= (-1)^n \begin{pmatrix} -3 & -2 & -1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

□

III - Rangs de matrices

Solution de l'exercice 10.

1. Les colonnes de la matrice ne sont pas colinéaires et la matrice est non nulle. Le rang vaut 2.

2. Toutes les lignes sont proportionnelles à la première qui est non nulle. Le rang vaut 1.

3. Toutes les lignes sont proportionnelles à la première qui est non nulle. Le rang vaut 1.

4. Les deux premiers vecteurs colonnes sont non colinéaires, le troisième est la somme des deux premiers. Le rang vaut 2.

5. Les deux vecteurs colonnes ne sont pas colinéaires. Le rang vaut 2.

6. Toutes les colonnes sont égales à la première qui est non nulle. Le rang vaut 1. □

Solution de l'exercice 11.

1. En effectuant des opérations élémentaires :

$$\begin{aligned}
\operatorname{Rg} A_1 &= \operatorname{Rg} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad {\scriptstyle \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \end{matrix}} \\
&= \operatorname{Rg} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad {\scriptstyle L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2} \\
&= 2
\end{aligned}$$

2. En effectuant des opérations élémentaires :

$$\begin{aligned}
\operatorname{Rg} A_2 &= \operatorname{Rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad {\scriptstyle L_3 \leftarrow L_3 - L_1} \\
&= \operatorname{Rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad {\scriptstyle L_3 \leftarrow 2L_3 + L_2} \\
&= 3.
\end{aligned}$$

3. En effectuant des opérations élémentaires :

$$\begin{aligned}
\operatorname{Rg} A_3 &= \operatorname{Rg}\begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & 3\\ 0 & 3 & -5 & -4\\ 0 & 6 & -7 & -13\\ 0 & 5 & 0 & -2\end{pmatrix} \quad {\scriptstyle \begin{matrix}L_2\leftarrow L_2-2L_1\\ L_3\leftarrow L_3-4L_1\\ L_4\leftarrow L_4-L_1\end{matrix}}\\
&= \operatorname{Rg}\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 3\\ 0 & -5 & 3 & -4\\ 0 & -7 & 6 & -13\\ 0 & 0 & 5 & -2\end{pmatrix} \quad {\scriptstyle C_2\leftrightarrow C_3}\\
&= \operatorname{Rg}\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 3\\ 0 & -5 & 3 & -4\\ 0 & 0 & 9 & -37\\ 0 & 0 & 5 & -2\end{pmatrix} \quad {\scriptstyle L_3\leftarrow 5L_3-7L_2}\\
&= \operatorname{Rg}\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 3\\ 0 & -5 & 3 & -4\\ 0 & 0 & 9 & -37\\ 0 & 0 & 0 & 167\end{pmatrix} \quad {\scriptstyle L_4\leftarrow 9L_4-5L_3}\\
&= 4.
\end{aligned}$$

□

IV - Questions plus théoriques

Solution de l'exercice 12.

1. Soit N, $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors, d'après la distributivité du produit matriciel par rapport à l'addition,

$$\begin{aligned}
\varphi(\lambda M + N) &= (\lambda M + N)A\\
&= \lambda MA + NA\\
&= \lambda\varphi(M) + \varphi(N).
\end{aligned}$$

Ainsi, φ est un endomorphisme de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

2. Rappelons que

$$E_{1,1} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\ E_{1,2} = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\ E_{1,3} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$E_{2,1} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\ E_{2,2} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\ E_{2,3} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$E_{3,1} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix},\ E_{3,2} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix},\ E_{3,3} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Ainsi,

$$\varphi(E_{1,1}) = E_{1,1}A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E_{1,1} + 2E_{1,2} + 3E_{1,3}$$

$$\varphi(E_{1,2}) = E_{1,2}A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -E_{1,1} + E_{1,2} + 2E_{1,3}$$

$$\varphi(E_{1,3}) = E_{1,3}A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E_{1,2} + 3E_{1,3}$$

$$\varphi(E_{2,1}) = E_{2,1}A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E_{2,1} + 2E_{2,2} + 3E_{2,3}$$

$$\varphi(E_{2,2}) = E_{2,2}A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -E_{2,1} + E_{2,2} + 2E_{2,3}$$

$$\varphi(E_{2,3}) = E_{2,3}A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E_{2,2} + 3E_{2,3}$$

$$\varphi(E_{3,1}) = E_{3,1}A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = E_{3,1} + 2E_{3,2} + 3E_{3,3}$$

$$\varphi(E_{3,2}) = E_{3,2}A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = -E_{3,1} + E_{3,2} + 2E_{3,3}$$

$$\varphi(E_{3,3}) = E_{3,3}A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = E_{3,2} + 3E_{3,3}$$

Ainsi, en notant $\mathscr{B} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,1}, E_{2,2}, E_{2,3}, E_{3,1}, E_{3,2}, E_{3,3})$,

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

□

Solution de l'exercice 13. Z_n est l'ensemble des matrices qui commutent avec toutes les matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Cet ensemble est appelé le *centre* de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. La lettre Z provient de l'initiale de *Zentrum* qui signifie centre en allemand.

1. Soit A, $B \in Z_n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrons que $\lambda A + B \in Z_n$.
Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Alors,

$$\begin{aligned}(\lambda A + B)M &= \lambda AM + BM \\ &= \lambda MA + MB, \text{ car } A, B \in Z_n \\ &= M(\lambda A + B).\end{aligned}$$

Ainsi, $\lambda A + B$ commute avec toute matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda A + B \in Z_n$.

2. a) On peut ici dessiner les matrices produits. . .

* La matrice $E_{i,j}A$ est constituée de 0 sauf sur la i^{e} ligne qui est constituée des éléments $a_{j,1}, a_{j,2}, \dots, a_{i,n}$.
* La matrice $AE_{i,j}$ est constituée de 0 sauf sur la j^{e} colonne qui est constituée des éléments $a_{1,i}, a_{2,i}, \dots, a_{n,i}$.

Comme $AE_{i,j} = E_{i,j}A$, en identifiant les éléments, on obtient

* les coefficients situés à la i^{e} ligne et j^{e} colonne sont égaux, soit $a_{j,j} = a_{i,i}$,
* les autres coefficients sont nuls, soit $a_{j,k} = 0$ si $k \neq j$ et $a_{k,i} = 0$ si $k \neq i$.

b) En uilisant la question précédente pour tous les couples (i, j) et en notant λ la valeur commune à tous les $a_{i,i}$, alors $A = \lambda I$.

3. Nous avons montré à la question précédente que, si A commute avec toutes les matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $A = \lambda I$.
Réciproquement, si $A = \lambda I$, pour tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $A(\lambda I) = \lambda I A = \lambda A$.
Finalement, $Z_n = \{\lambda I,\ \lambda \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}\,\{I\}$. □

Solution de l'exercice 14. Raisonnons par Analyse / Synthèse.

Analyse. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Supposons qu'il existe S symétrique et A antisymétrique telles que $M = S + A$. Alors,

$$\begin{aligned} M &= S + A \\ M^T &= S^T + A^T \\ &= S - A \end{aligned}$$

Ainsi, en additionnant puis soustrayant ces égalités, on obtient

$$S = \frac{1}{2}(M + M^T) \text{ et } A = \frac{1}{2}(M - M^T).$$

Synthèse. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Posons

$$S = \frac{1}{2}(M + M^T) \text{ et } A = \frac{1}{2}(M - M^T).$$

D'une part,

$$\begin{aligned} S^T &= \left(\frac{1}{2}(M + M^T)\right)^T = \frac{1}{2}(M^T + M) = S \\ A^T &= \left(\frac{1}{2}(M - M^T)\right)^T = \frac{1}{2}(M^T - M) = -A \end{aligned}$$

Ainsi, S est symétrique et A est antisymétrique.
D'autre part,

$$S + A = \frac{1}{2}(M + M^T) + \frac{1}{2}(M - M^T) = M.$$

□

Solution de l'exercice 15.

1. Comme $f^2 \neq 0$, l'application f^2 n'est pas l'application nulle et il existe $x_0 \in \mathbb{R}^3$ tel que $f(x_0) \neq 0$.

2. Soit a, b, $c \in \mathbb{R}$ tels que

$$a x_0 + b f(x_0) + c f^2(x_0) = 0.$$

En composant par f^2,

$$\begin{aligned} a f^2(x_0) + b f^3(x_0) + c f^4(x_0) &= f^2(0) \\ a f^2(x_0) &= 0, \text{ car } f^3 = f^4 = 0 \end{aligned}$$

Comme $f^2(x_0) \neq 0$, alors $a = 0$.
Ainsi, en reprenant l'équation, on obtient

$$b f(x_0) + c f^2(x_0) = 0.$$

En composant par f,

$$\begin{aligned} b f^2(x_0) + c f^3(x_0) &= f(0) \\ b f^2(x_0) &= 0, \quad \text{car } f^3 = 0 \end{aligned}$$

Comme $f^2(x_0) = 0$, alors $b = 0$.
Ainsi, en reprenant l'équation, on obtient

$$c f^2(x_0) = 0.$$

Comme $f^2(x_0) = 0$, alors $c = 0$.
Finalement, $a = b = c = 0$ et la famille $(x_0, f(x_0), f^2(x_0))$ est libre.

3. Comme

$$\begin{aligned} f(x_0) &= f(x_0) \\ f(f(x_0)) &= f^2(x_0) \\ f(f^2(x_0)) &= f^3(x_0) = 0, \end{aligned}$$

alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Soit g telle que $g \circ f = f \circ g$. Notons

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ \gamma & h & i \end{pmatrix}.$$

Alors,

$$\begin{aligned} f \circ g &= g \circ f \\ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g) &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g)\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} b & c & 0 \\ e & f & 0 \\ h & i & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{cases} b &= 0 \\ c &= 0 \\ a &= e \\ b &= f \\ d &= h \\ e &= i \\ f &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b &= c = f = 0 \\ a &= e \\ d &= h \\ e &= i \end{cases}$$

soit

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ d & a & 0 \\ \gamma & d & a \end{pmatrix}$$

5. Notons $N = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$. On remarque que

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si g commute avec f, d'après la question précédente, il existe $a,\ d,\ \gamma \in \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{aligned} \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g) &= a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= aI_3 + dN + \gamma N^2 \\ g &= a\,\mathrm{Id} + df + \gamma f^2. \end{aligned}$$

Réciproquement, si $g = af^2 + bf + c\,\mathrm{Id}$, alors $g \circ f = af^3 + bf^2 + cf = f \circ g$. $\square$

Solution de l'exercice 16.

1. D'après la définition du produit matriciel,

$$\begin{aligned} AX &= 0 \\ \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1,j}x_j \\ \sum_{j=2}^{n} a_{2,j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=2}^{n} a_{n,j}x_j \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

En utilisant la i^{e} ligne de ce produit matriciel, puis en sortant le i^{e} terme de la somme,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}x_j &= 0 \\ \sum_{k \neq i} a_{i,k}x_k + a_{i,i}x_i &= 0 \\ a_{i,i}x_i &= -\sum_{k \neq i} a_{i,k}x_k. \end{aligned}$$

2. En utilisant l'inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned}
|a_{i_0,i_0} x_{i_0}| &\leqslant \sum_{k \neq i_0} |a_{i_0,k} x_k| \\
|a_{i_0,i_0}| \cdot |x_{i_0}| &\leqslant \sum_{k \neq i_0} |a_{i_0,k}| \cdot |x_{i_0}| \\
|a_{i_0,i_0}| &\leqslant \sum_{k \neq i_0} |a_{i_0,k}|\,,
\end{aligned}$$

car $x_{i_0} \neq 0$.

3. D'après l'hypothèse,

$$|a_{i_0,i_0}| > \sum_{k \neq i_0} |a_{i_0,k}|\,.$$

On obtient ainsi une contradiction et $X = 0$.

Finalement, $\operatorname{Ker} A = \{0\}$. Ainsi, l'endomorphisme canoniquement associé à A est injectif donc bijectif. La matrice A est donc inversible. $\square$