T.D. X - Réduction

I - Diagonalisation

Solution de l'exercice 1.

1. La matrice A_1 est diagonale, donc diagonalisable.

2. La matrice est A_2 est symétrique réelle donc diagonalisable.

3. La matrice A_3 est triangulaire supérieure. Ses valeurs propres se lisent sur sa diagonale et sont donc 1, 2 et 3. Comme A_3 est de taille 3 et possède 3 valeurs propres distinctes, alors A est diagonalisable.

4. La matrice A_4 est triangulaire supérieure. Ses valeurs propres se lisent sur sa diagonale, donc A_4 possède comme seule valeur propre 2. Ainsi, si A_4 était diagonalisable, il existerait une matrice P inversible telle que $A_4 = P(2I_3)P^{-1} = 2I_3$. Or, $A \neq 2I_3$. Ainsi, A_4 n'est pas diagonalisable. □

Solution de l'exercice 2.

1. La matrice $A - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 2 & 2-\lambda \end{pmatrix}$ n'est pas inversible si et seulement si

$$\begin{aligned}
&(1-\lambda)(2-\lambda) - 2\times 3 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & (\lambda-4)(\lambda+1) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \lambda \in \{-1, 4\}.
\end{aligned}$$

2. La matrice A est de taille 2 et possède deux valeurs propres distinctes, donc A est diagonalisable.

3. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un vecteur propre de A associé à la valeur propre 4. Alors,

$$\begin{aligned}
AX &= 4X \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y &= 4x \\ 2x + 2y &= 4y \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} -3x + 3y &= 0 \\ 2x - 2y &= 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow (x, y) \in \mathrm{Vect}\left\{(1,1)\right\}.
\end{aligned}$$

Ainsi, $E_4(A) = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un vecteur propre de A associé à la valeur propre -1. Alors,

$$\begin{aligned}
AX &= -X \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y &= -x \\ 2x + 2y &= -y \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y &= 0 \\ 2x + 3y &= 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow (x, y) \in \mathrm{Vect}\left\{(-3,2)\right\}.
\end{aligned}$$

Ainsi, $E_{-1}(A) = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$.

4. En posant $P = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, d'après les formules de changement de base,

$$A = PDP^{-1}.$$

□

Solution de l'exercice 3.

1. La matrice $A - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}$ n'est pas inversible si et seulement si

$$\begin{aligned} & (2-\lambda)(-\lambda) - (-1)\times 1 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (\lambda-1)^2 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \lambda = 1. \end{aligned}$$

2. D'après la question précédente, l'unique valeur propre de A est 1. Supposons par l'absurde que A soit diagonalisable. Alors, il existe une matrice inversible P telle que

$$\begin{aligned} A &= P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1} \\ &= PI_2P^{-1} = I_2. \end{aligned}$$

Or, $A \neq I_2$, donc on obtient une contradiction et A n'est pas diagonalisable. □

Solution de l'exercice 4. Soit A diagonalisable dont l'unique valeur propre est λ_0. Alors, il existe une matrice inversible P telle que

$$A = P(\lambda_0 I_n)P^{-1} = \lambda_0 I_n.$$

Ainsi, l'ensemble des matrices diagonalisables qui ont pour seule valeur propre λ_0 ne contient qu'un seul élément et vaut $\{\lambda_0 I_n\}$. □

Solution de l'exercice 5.

1. On remarque que

$$AX_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix} = 4X_1.$$

Comme X_1 est non nul et $AX_1 = 4X_1$, alors X_1 est vecteur propre de A associé à la valeur propre 4.

De même,

$$AX_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = -2X_2.$$

Comme X_2 est non nul et $AX_2 = -2X_2$, alors X_2 est vecteur propre de A associé à la valeur propre -2.

Enfin,

$$AX_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = X_3.$$

Comme X_3 est non nul et $AX_3 = X_3$, alors X_3 est vecteur propre de A associé à la valeur propre 1.

2. En posant $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, d'après les formules de changement de base,

$$A = PDP^{-1}.$$

□

Solution de l'exercice 6.

1. La matrice A est symétrique réelle donc diagonalisable.

2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \mathrm{Rg}(A - \lambda I_3) &= \mathrm{Rg}\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \\ &= \mathrm{Rg}\begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 1 \\ -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \quad {\scriptstyle L_1 \leftrightarrow L_2} \\ &= \mathrm{Rg}\begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda^2 & \lambda \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \quad {\scriptstyle L_2 \leftarrow L_2 + \lambda L_1} \\ &= \mathrm{Rg}\begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 1-\lambda^2 & \lambda \end{pmatrix} \quad {\scriptstyle L_3 \leftrightarrow L_2} \\ &= \mathrm{Rg}\begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & \lambda^3 - 2\lambda \end{pmatrix} \quad {\scriptstyle L_3 \leftrightarrow L_3 - (1-\lambda^2)L_2}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}&\mathrm{Rg}(A-\lambda I_3)<3\\ \Leftrightarrow\ &\lambda^3-2\lambda=0\\ \Leftrightarrow\ &\lambda(\lambda-\sqrt{2})(\lambda+\sqrt{2})=0\end{aligned}$$

Les valeurs propres de A sont donc $-\sqrt{2}$, 0 et $\sqrt{2}$.
Remarque. Comme A est de taille 3 et possède 3 valeurs propres distinctes, on retrouve le fait que A soit diagonalisable.

Soit $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in E_0(A)=\mathrm{Ker}(A)$. Alors,

$$AX=0\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}y&=0\\x+z&=0\\y&=0\end{cases}$$

Ainsi,

$$E_0(A)=\mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right\}.$$

Soit $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in E_{\sqrt{2}}(A)$. Alors,

$$AX=0\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}y&=\sqrt{2}x\\x+z&=\sqrt{2}y\\y&=\sqrt{2}z\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\ \begin{cases}x-\sqrt{2}y+z&=0\\-\sqrt{2}x+y&=0\\y-\sqrt{2}z&=0\end{cases}\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}x-\sqrt{2}y+z&=0\\-y+\sqrt{2}z&=0\\y-\sqrt{2}z&=0\end{cases}\ {\scriptstyle L_2\leftarrow L_2+\sqrt{2}L_1}\ .$$

Ainsi,

$$E_{\sqrt{2}}(A)=\mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

De manière analogue,

$$E_{-\sqrt{2}}(A)=\mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\-\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

Finalement, en posant $P=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&\sqrt{2}&-\sqrt{2}\\-1&1&1\end{pmatrix}$ et $D=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&\sqrt{2}&0\\0&0&-\sqrt{2}\end{pmatrix}$, alors d'après les formules de changement de base,

$$A=PDP^{-1}.$$

□

II - Réduction & Application

Solution de l'exercice 7.

1. Soit $\lambda\in\mathbb{R}$. En utilisant des opérations élémentaires,

$$\begin{aligned}\mathrm{Rg}(A-\lambda I_3)&=\mathrm{Rg}\begin{pmatrix}3-\lambda&-1&1\\1&2-\lambda&0\\0&1&1-\lambda\end{pmatrix}\\&=\mathrm{Rg}\begin{pmatrix}1&2-\lambda&0\\3-\lambda&-1&1\\0&1&1-\lambda\end{pmatrix}\quad{\scriptstyle L_2\leftrightarrow L_1}\\&=\mathrm{Rg}\begin{pmatrix}1&2-\lambda&0\\0&-1-(2-\lambda)(3-\lambda)&1\\0&1&1-\lambda\end{pmatrix}\quad{\scriptstyle L_2\leftarrow L_2-(3-\lambda)L_1}\\&=\mathrm{Rg}\begin{pmatrix}1&2-\lambda&0\\0&1&1-\lambda\\0&-\lambda^2+5\lambda-7&1\end{pmatrix}\quad{\scriptstyle L_3\leftrightarrow L_2}\\&=\mathrm{Rg}\begin{pmatrix}1&2-\lambda&0\\0&1&1-\lambda\\0&0&-\lambda^3+6\lambda^2-12\lambda+8\end{pmatrix}\quad{\scriptstyle L_3\leftarrow L_3-(-\lambda^2+5\lambda-7)L_2}.\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathrm{Rg}(A-\lambda I_3)<3$ si et seulement si

$$\begin{aligned}-\lambda^3+6\lambda^2-12\lambda+8&=0\\-(\lambda-2)^3&=0\\\lambda&=2.\end{aligned}$$

Ainsi, l'unique valeur propre de A est 2.

Supposons par l'absurde que A soit diagonalisable. Alors, il existe une matrice P inversible telle que $A=P(2I_3)P^{-1}=2I_3$. On obtient ainsi une contradiction et A n'est pas inversible.

2. Soit $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in E_2(A)$. Alors,

$$\begin{aligned}&AX=2X\\\Leftrightarrow&\begin{cases}3x-y+z&=2x\\x+2y&=2y\\y+z&=2z\end{cases}\\\Leftrightarrow&\begin{cases}x-y+z&=0\\x&=0\\y-z&=0\end{cases}\\\Leftrightarrow&\begin{cases}x&=0\\y-z&=0\end{cases}.\end{aligned}$$

Ainsi, $E_2(A)=\mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$.

3. a) D'après la question précédente, on cherche e_1 tel que $e_1\in E_2(f)$. On pose donc $e_1=(0,1,1)$.

b) D'après la définition de f,

$$\begin{aligned}f(e_2)&=e_1+2e_2\\(3a-b-1,a+2b,b-1)&=(0,1,1)+2(a,b,-1).\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{cases}3a-b-1&=2a\\a+2b&=1+2b\\b-1&=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a-b&=1\\a&=1\\b&=0\end{cases}$$

On pose ainsi $e_2=(1,0,-1)$.

c) D'après la définition de f,

$$\begin{aligned}f(e_3)&=e_2+2e_3\\(3c-d+2,c+2d,d+2)&=(1,0,-1)+2(c,d,2).\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{cases}3c-d+2&=1+2c\\c+2d&=2d\\d+2&=-1+4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c-d&=-1\\c&=0\\d&=1\end{cases}$$

On pose ainsi $e_3=(0,1,2)$.

d) Montrons que (e_1,e_2,e_3) est libre. Soient λ, μ, ν des réels tels que

$$\begin{aligned}&\lambda e_1+\mu e_2+\nu e_3=(0,0,0)\\\Leftrightarrow&\begin{cases}\mu&=0\\\lambda+\nu&=0\\\lambda-\mu+2\nu&=0\end{cases}\\\Leftrightarrow&\begin{cases}\mu&=0\\\lambda+\nu&=0\\\lambda+2\nu&=0\end{cases}\end{aligned}$$

soit $\lambda=\mu=\nu=0$.
Ainsi, $\mathscr{B}$ est une famille libre composée de 3 vecteurs de $\mathbb{R}$, espace vectoriel de dimension 3, donc $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
De plus, d'après les questions précédentes, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)=T$.

4. D'après les questions précédentes,

$$T=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\1&-1&2\end{pmatrix}.$$

Calculons l'inverse de T en utilisant l'algorithme de Gauss-Jordan :

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc|} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc|l} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & L_1 \leftarrow L_2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & L_2 \leftarrow L_1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & \end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc|l} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc|l} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc|l} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & \end{array}\right.$$

Ainsi, $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Posons $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Alors, $T = 2I_3 + B$.

Comme $2I_3$ et B commutent, d'après la formule du binôme de Newton,

$$T^n = (2I_3 + B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (2I_3)^{n-k} B^k.$$

Or, $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B^3 = 0_3$. Ainsi, pour tout $n \geqslant 2$,

$$\begin{aligned} T^n &= \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} 2^{n-k} B^k \\ &= 2^n I_3 + 2^{n-1} n B + 2^{n-2} \frac{n(n-1)}{2} B^2 \\ &= \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} & n(n-1)2^{n-3} \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

6. En utilisant les formules de changement de base,

$$\begin{aligned} \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(f) &= P_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}} \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{C}} \\ A &= PTP^{-1}. \end{aligned}$$

On montre ainsi par récurrence que

$$A^n = PT^nP^{-1}.$$

En utilisant la question précédente et en effectuant un produit matriciel,

$$A^n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \times 3^n & 1 - 3^n & 3^n - 1 \\ -2(2^n - 3^n) & 2^{n+2} - 3^n - 1 & -2^{n+1} + 3^n + 1 \\ -2(2^n - 3^n) & 2^{n+2} - 3^n - 3 & -2^{n+1} + 3^n + 3 \end{pmatrix}.$$

□

Solution de l'exercice 8.

1. D'après la définition, pour tout n entier naturel, $v_{n+1} = 2v_n$ et $v_0 = -1$. Ainsi, (v_n) est une suite géométrique de raison 2 et de premier terme -1. Donc,

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ v_n = -2^n.$$

2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $A - \lambda I_3$ ne soit pas inversible, i.e. $\mathrm{Rg}(A - \lambda I_3) < 3$.

Or,

$$\begin{aligned}\mathrm{Rg}(A-\lambda I_3) &= \mathrm{Rg}\begin{pmatrix}-3-\lambda & 4 & -1\\ 0 & 2-\lambda & 0\\ 0 & -4 & -2-\lambda\end{pmatrix}\\ &= \mathrm{Rg}\begin{pmatrix}-3-\lambda & -1 & 4\\ 0 & 0 & 2-\lambda\\ 0 & -2-\lambda & -4\end{pmatrix} \quad {\scriptstyle C_2\leftrightarrow C_3}\\ &= \mathrm{Rg}\begin{pmatrix}-3-\lambda & -1 & 4\\ 0 & -2-\lambda & -4\\ 0 & 0 & 2-\lambda\end{pmatrix} \quad {\scriptstyle L_2\leftrightarrow L_3}\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathrm{Rg}(A-\lambda I_3)<3$ si et seulement si $\lambda\in\{-3,-2,2\}$.

3. D'après la question précédente, A possède trois valeurs propres distinctes, donc A est diagonalisable.
En résolvant des systèmes linéaires, on obtient

$$E_{-3}(A)=\mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\},$$

$$E_{-2}(A)=\mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\},$$

$$E_{3}(A)=\mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

Ainsi, en posant $P=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$ et $D=\begin{pmatrix}-3 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$, alors $A=PDP^{-1}$.

4. Montrons par récurrence que $A^n=PD^nP^{-1}$ pour tout n entier naturel.
Initialisation. Lorsque $n=0$. D'une part, $A^0=I_3$. D'autre part, $PD^0P^{-1}=PI_3P^{-1}=PP^{-1}=I_3$. Ainsi, la propriété est vraie à l'ordre 0.

Hérédité. Soit $n\in\mathbb{N}$. Supposons que $A^n=PD^nP^{-1}$. Alors,

$$\begin{aligned}A^{n+1} &= A^nA\\ &= PD^nP^{-1}A, \quad \text{d'après l'H.R.}\\ &= PD^nP^{-1}PDP^{-1}, \quad \text{d'après la question } \mathbf{3.}\\ &= PD^nDP^{-1}\\ &= PD^{n+1}P^{-1}.\end{aligned}$$

Ainsi, la propriété est vraie à l'ordre $n+1$.
Conclusion. Finalement, la propriété est vraie à l'ordre 0 et est héréditaire donc

$$\forall\, n\in\mathbb{N},\ A^n=PD^nP^{-1}.$$

5. Comme la matrice D est diagonale,

$$\forall\, n\in\mathbb{N},\ D^n=\begin{pmatrix}(-3)^n & 0 & 0\\ 0 & (-2)^n & 0\\ 0 & 0 & 3^n\end{pmatrix}.$$

En utilisant la méthode de Gauss-Jordan, on obtient

$$P^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}.$$

Finalement, pour tout n entier naturel,

$$A^n=PD^nP^{-1}=\begin{pmatrix}(-3)^n & 2^n-(-2)^n & (-3)^n-(-2)^n\\ 0 & 2^n & 0\\ 0 & (-2)^n-2^n & (-2)^n\end{pmatrix}.$$

6. En utilisant la définition du produit matriciel,

$$\begin{aligned}U_{n+1}=\begin{pmatrix}u_{n+1}\\ v_{n+1}\\ w_{n+1}\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}-3u_n+4v_n-w_n\\ 2v_n\\ -4v_n+2w_n\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}-3 & 4 & -1\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & -4 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_n\\ v_n\\ w_n\end{pmatrix}\\ &= AU_n.\end{aligned}$$

7. Montrons par récurrence que $U_n = A^n U_0$ pour tout n entier naturel.
Initialisation. Lorsque $n = 0$. Comme $A^0 = I_3$, alors $A^0 U_0 = I_3 U_0 = U_0$. La propriété est donc vraie à l'ordre 0.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $U_n = A^n U_0$. Alors,

$$\begin{aligned} U_{n+1} &= AU_n, \text{ d'après la question } \mathbf{6} \\ &= AA^n U_0, \text{ d'après l'H.R.} \\ &= A^{n+1} U_0, \text{ d'après la définition des puissances} \end{aligned}$$

Ainsi, la propriété est vraie à l'ordre $n+1$.
Conclusion. Finalement, la propriété est vraie à l'ordre 0 et est héréditaire, donc d'après le principe de récurrence,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, U_n = A^n U_0.$$

8. En reprenant le résultat de la question **5.**

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} &= A^n U_0 \\ &= \begin{pmatrix} (-3)^n & 2^n - (-2)^n & (-3)^n - (-2)^n \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & (-2)^n - 2^n & (-2)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (-3)^n - 2^n + (-2)^n + 2(-3)^n - 2(-2)^n \\ -2^n \\ -(-2)^n + 2^n + 2(-2)^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout n entier naturel,

$$\begin{cases} u_n &= -2^n - (-2)^n - (-3)^{n+1} \\ v_n &= -2^n \\ w_n &= 2^n + (-2)^n \end{cases}$$

□

Solution de l'exercice 9.

1. On utilise la définition du produit matriciel,

2. D'après la question précédente,

$$\begin{aligned} A^3 - 4A^2 + A + 6I_3 &= 0 \\ A^3 - 4A^2 + A &= -6I_3 \\ A\left[-\frac{1}{6}(A^2 - 4A + I_3)\right] &= I_3. \end{aligned}$$

Ainsi, A est inversible et

$$A^{-1} = -\frac{1}{6}(A^2 - 4A + I_3).$$

3. On remarque que

$$R(2) = 2^3 - 4 \times 2^2 + 2 + 6 = 8 - 16 + 8 = 0.$$

En utilisant une division euclidienne, on obtient

$$R(X) = (X - 2)(X^2 - 2X - 3).$$

4. On remarque que

$$R(X) = (X - 2)(X + 1)(X - 3).$$

Si λ est une valeur propre de A, il existe un vecteur X non nul tel que

$$\begin{aligned} *AX &= \lambda X \\ A^2 X &= A(\lambda X) = \lambda^2 X \\ A^3 X &= A(A^2 X) = \lambda^2 AX = \lambda^3 X. \end{aligned}$$

Ainsi, d'après la question **1.**,

$$\begin{aligned} (A^3 - 4A^2 + A + 6I_3)X &= 0_3 X \\ A^3 X - 4A^2 X + AX + 6X &= 0_{3,1} \\ \lambda^3 X - 4\lambda^2 X + \lambda X + 6X &= 0_{3,1} \\ (\lambda^3 - 4\lambda^2 + \lambda + 6)X &= 0_{3,1} \end{aligned}$$

Comme X est non nul, alors $\lambda^3 - 4\lambda^2 + \lambda + 6 = 0$, soit $R(\lambda) = 0$. Ainsi, $\lambda \in \{-1, 2, 3\}$.

5. En résolvant des équations, on obtient

$$E_{-1}(A) = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}\right\},$$

$$E_2(A) = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}\right\},$$

$$E_3(A) = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

6. Ainsi, A possède trois valeurs propres distinctes et A est diagonalisable. $\square$