T.D. XIV - Nombres complexes

I - Écritures

Solution de l'exercice 1.

1. En développant l'expression,

$$\begin{aligned}(2+6\,\mathrm{i})(6+\mathrm{i}) &= 2(1+3\,\mathrm{i})(6+\mathrm{i}) = 2(6-3+(6+3)\,\mathrm{i})\\ &= 2(3+9\,\mathrm{i}) = 6+18\,\mathrm{i}\,.\end{aligned}$$

2. En utilisant une identité remarquable,

$$\begin{aligned}(4-3\,\mathrm{i})^2 &= 4^2 - 2\times 4\times 3\,\mathrm{i} + (-3\,\mathrm{i})^2\\ &= 16-24\,\mathrm{i}-9 = 7-24\,\mathrm{i}\,.\end{aligned}$$

3. En utilisant une identité remarquable,

$$(1-2\,\mathrm{i})(1+2\,\mathrm{i}) = 1^2 - (2\,\mathrm{i})^2 = 1+4 = 5.$$

4. En utilisant la formule du binôme de Newton,

$$\begin{aligned}(2-3\,\mathrm{i})^4 &= 2^4 - 4\times 2^3\times 3\,\mathrm{i} + 6\times 2^2\times(3\,\mathrm{i})^2 - 4\times 2\times(3\,\mathrm{i})^3 + (3\,\mathrm{i})^4\\ &= 16-96\,\mathrm{i}-216+216\,\mathrm{i}+81 = -119+120\,\mathrm{i}\,.\end{aligned}$$

5. En utilisant les propriétés de l'inverse,

$$\frac{1}{3-\mathrm{i}} = \frac{3+\mathrm{i}}{3^2+1} = \frac{3+\mathrm{i}}{10}.$$

6. En utilisant les propriétés de l'inverse,

$$\begin{aligned}\frac{1-\sqrt{3}\,\mathrm{i}}{-1-\sqrt{3}\,\mathrm{i}} &= \frac{(1-\sqrt{3}\,\mathrm{i})(-1+\sqrt{3}\,\mathrm{i})}{(-1)^2+\sqrt{3}^2}\\ &= -\frac{(1-\sqrt{3}\,\mathrm{i})^2}{1+3} = -\frac{1-2\sqrt{3}\,\mathrm{i}-3}{4}\\ &= \frac{1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}}{2}.\end{aligned}$$

7. En utilisant les propriétés de l'inverse,

$$\begin{aligned}\frac{1-\mathrm{i}}{1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}} &= \frac{(1-\mathrm{i})(1-\sqrt{3}\,\mathrm{i})}{1^2+\sqrt{3}^2}\\ &= \frac{1-\sqrt{3}-\sqrt{3}\,\mathrm{i}-\mathrm{i}}{4}\\ &= \frac{1-\sqrt{3}-(1+\sqrt{3})\,\mathrm{i}}{4}.\end{aligned}$$

□

Solution de l'exercice 2.

1. $12 = 12\,\mathrm{e}^{0\,\mathrm{i}}$.

2. $\frac{3}{2}\,\mathrm{i} = \frac{3}{2}\,\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}\,\mathrm{i}}$.

3. $-3 = 3\,\mathrm{e}^{\pi\,\mathrm{i}}$.

4. $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{i} = \mathrm{e}^{\frac{2\pi}{3}\,\mathrm{i}}$.

5. $-2i = \mathrm{e}^{\pi\,\mathrm{i}}\,2\,\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}\,\mathrm{i}} = 2\,\mathrm{e}^{\frac{3\pi}{2}\,\mathrm{i}}$.

6. $\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} = \frac{1+\mathrm{i}}{\mathrm{i}(-\mathrm{i}-1)} = \mathrm{i} = \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}\,\mathrm{i}}$.

7.

$$\begin{aligned}\left(\frac{\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\right)^4 &= \left(\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{i}\right)}\right)^4\\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}\,\mathrm{i}}}{\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\,\mathrm{i}}}\right)^4\\ &= \frac{1}{4}\left(\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\,\mathrm{i}}\right)^4\\ &= \frac{1}{4}\,\mathrm{e}^{\pi\,\mathrm{i}}.\end{aligned}$$

8.

$$-3(\cos(\theta)+\sin(\theta)\,\mathrm{i}) = \mathrm{e}^{\pi\,\mathrm{i}}\times 3\times\mathrm{e}^{\theta\,\mathrm{i}} = 3\,\mathrm{e}^{(\pi+\theta)\,\mathrm{i}}.$$

9. D'après la parité des fonctions cosinus et sinus,

$$2(\cos(2\theta)-\sin(2\theta)\,\mathrm{i}) = 2(\cos(-2\theta)+\sin(-2\theta)\,\mathrm{i}) = 2\,\mathrm{e}^{-2\theta\,\mathrm{i}}.$$

10.

$$\begin{aligned}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{i}\right)(1-\mathrm{i}) &= \left(\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{4}\,\mathrm{i}\right)\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{4}\,\mathrm{i}\right)\\ &= \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}\,\mathrm{i}}\times\sqrt{2}\times\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}\,\mathrm{i}}\\ &= \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}\,\mathrm{i}}.\end{aligned}$$

11. En divisant numérateur et dénominateur par 2,

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}\,\mathrm{i}}{1-\sqrt{3}\,\mathrm{i}} &= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{i}}{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{i}}\\ &= \frac{\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}\,\mathrm{i}}}{\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{3}\,\mathrm{i}}}\\ &= \mathrm{e}^{\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)\mathrm{i}}\\ &= \mathrm{e}^{\frac{\pi}{12}\,\mathrm{i}}.\end{aligned}$$

12. En utilisant les propriétés des fonctions trigonométriques,

$$\sin(\theta)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) \text{ et } \cos(\theta)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right).$$

Ainsi,

$$\sin(\theta)+\cos(\theta)\,\mathrm{i}) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\mathrm{i} = \mathrm{e}^{\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\mathrm{i}}.$$

□

Solution de l'exercice 3.

1. En utilisant la définition du module,

$$|z|^2 = \frac{(1+\sqrt{2})^2+1^2}{(1+\sqrt{2})^2+(-1)^2} = 1.$$

Ainsi, $|z|=1$.

2. En utilisant les propriétés de l'inverse,

$$\begin{aligned}z &= \frac{(1+\sqrt{2}+\mathrm{i})(1+\sqrt{2}+\mathrm{i})}{(1+\sqrt{2})^2+1^2}\\ &= \frac{(1+\sqrt{2})^2+2(1+\sqrt{2})\,\mathrm{i}-1}{1+2\sqrt{2}+2+1}\\ &= \frac{1+2\sqrt{2}+2+2(1+\sqrt{2})\,\mathrm{i}-1}{2(2+\sqrt{2})}\\ &= \frac{1+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}(1+\mathrm{i})\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1+\mathrm{i}).\end{aligned}$$

3. En utilisant la question précédente,

$$z = \mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\,\mathrm{i}}.$$

Or, $2021 = 4\times 505+1$, soit

$$\begin{aligned}z^{2021} &= \mathrm{e}^{\frac{2021}{4}\pi\,\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{\left(505+\frac{1}{4}\right)\pi\,\mathrm{i}}\\ &= \left(\mathrm{e}^{\pi\,\mathrm{i}}\right)^{505}\times\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\,\mathrm{i}}\\ &= (-1)^{505}\,\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\,\mathrm{i}}\\ &= -\,\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\,\mathrm{i}}.\end{aligned}$$

□

Solution de l'exercice 4. Comme a et b sont de module 1, il existe θ et φ deux réels tels que $a=\mathrm{e}^{\theta\,\mathrm{i}}$ et $b=\mathrm{e}^{\varphi\,\mathrm{i}}$. Alors,

$$\begin{aligned}\frac{a+b}{a-b} &= \frac{\mathrm{e}^{\theta\,\mathrm{i}}+\mathrm{e}^{\varphi\,\mathrm{i}}}{\mathrm{e}^{\theta\,\mathrm{i}}-\mathrm{e}^{\varphi\,\mathrm{i}}}\\ &= \frac{\mathrm{e}^{\frac{\theta+\varphi}{2}\,\mathrm{i}}}{\mathrm{e}^{\frac{\theta+\varphi}{2}\,\mathrm{i}}}\,\frac{\mathrm{e}^{\frac{\theta-\varphi}{2}\,\mathrm{i}}+e^{-\frac{\theta-\varphi}{2}\,\mathrm{i}}}{\mathrm{e}^{\frac{\theta-\varphi}{2}\,\mathrm{i}}-e^{-\frac{\theta-\varphi}{2}\,\mathrm{i}}}\\ &= \frac{2\cos\frac{\theta-\varphi}{2}}{2i\sin\frac{\theta-\varphi}{2}}\\ &= -\frac{\cos\frac{\theta-\varphi}{2}}{\sin\frac{\theta-\varphi}{2}}\,\mathrm{i}\\ &\in \mathrm{i}\,\mathbb{R}.\end{aligned}$$

□

Solution de l'exercice 5.

1. Comme $x \notin \pi\mathbb{Z}$, alors $\mathrm{e}^{x\,\mathrm{i}} \neq 0$. Ainsi, d'après la somme des termes d'une suite géométrique,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{kx\,\mathrm{i}} &= \frac{1-\mathrm{e}^{(n+1)x\,\mathrm{i}}}{1-\mathrm{e}^{x\,\mathrm{i}}} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{\frac{n+1}{2}x\,\mathrm{i}}}{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}\,\mathrm{i}}} \times \frac{\mathrm{e}^{-\frac{n+1}{2}x\,\mathrm{i}} - \mathrm{e}^{\frac{n+1}{2}x\,\mathrm{i}}}{\mathrm{e}^{-\frac{-x}{2}\,\mathrm{i}} - \mathrm{e}^{\frac{x}{2}\,\mathrm{i}}} \\ &= \mathrm{e}^{\frac{n}{2}x\,\mathrm{i}} \frac{-2i\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{-2i\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \\ &= \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \mathrm{e}^{\frac{n}{2}x\,\mathrm{i}}.\end{aligned}$$

2. En utilisant l'expression précédente,

$$\left(\sum_{k=0}^{n}\cos(kx)\right) + \left(\sum_{k=0}^{n}\sin(kx)\right)\mathrm{i} = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\left(\cos\left(\frac{n}{2}x\right) + \sin\left(\frac{n}{2}x\right)\right).$$

Ainsi, en identifiant les parties réelles et imaginaires,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\cos(kx) &= \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\cos\left(\frac{n}{2}x\right), \\ \sum_{k=0}^{n}\sin(kx) &= \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\sin\left(\frac{n}{2}x\right).\end{aligned}$$

□

II - Résolution d'équations

Solution de l'exercice 6.

1. Le discriminant vaut $-9 = -3^2$. Ainsi, les solutions sont

$$-3\,\mathrm{i} \text{ et } 3\,\mathrm{i}.$$

2. Le discriminant vaut $(-1)^2 - 4 = -3$. Ainsi, les solutions sont

$$\frac{1-\sqrt{3}\,\mathrm{i}}{2} \text{ et } \frac{1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}}{2}.$$

3. Le discriminant vaut $1^2 - 4 = -3$. Ainsi, les solutions sont

$$\frac{-1-\sqrt{3}\,\mathrm{i}}{2} \text{ et } \frac{-1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}}{2}.$$

4. On écrit $3z^2 - 6z + 6 = 3\left(z^2 - 2z + 2\right)$. Le discriminant vaut $(-2)^2 - 4 \times 2 = -4$. Ainsi, les solutions sont

$$\frac{2-2\,\mathrm{i}}{2} = 1-\mathrm{i} \text{ et } \frac{2+2\,\mathrm{i}}{2} = 1+\mathrm{i}.$$

5. On pose $x = z^2$. Alors, $x^2 + x + 1 = 0$. Le discriminant vaut $1^2 - 4 = -3$ donc les solutions sont

$$x_1 = \frac{-1-\sqrt{3}\,\mathrm{i}}{2} \text{ et } x_2 = \frac{-1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}}{2}$$

On remarque que

$$x_1 = -\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}2}{\mathrm{i}}\right) = \mathrm{e}^{\pi\,\mathrm{i}}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{3}\,\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{\frac{4\pi}{3}\,\mathrm{i}}.$$

Donc, $x_2 = \overline{x_1} = \mathrm{e}^{-\frac{4\pi}{3}\,\mathrm{i}}$.
Ainsi, $z^2 \in \left\{\mathrm{e}^{\frac{4\pi}{3}\,\mathrm{i}}, \mathrm{e}^{-\frac{4\pi}{3}\,\mathrm{i}}\right\}$.

* Si $z^2 = x_1 = \mathrm{e}^{\frac{4\pi}{3}\,\mathrm{i}}$, alors

$$z \in \left\{\mathrm{e}^{\frac{4\pi}{6}\,\mathrm{i}}, -\mathrm{e}^{\frac{4\pi}{6}\,\mathrm{i}}\right\}.$$

* Si $z^2 = x_2 = \mathrm{e}^{\frac{-4\pi}{3}\,\mathrm{i}}$, alors

$$z \in \left\{\mathrm{e}^{\frac{-4\pi}{6}\,\mathrm{i}}, -\mathrm{e}^{\frac{-4\pi}{6}\,\mathrm{i}}\right\}.$$

Finalement, l'ensemble des solutions est

$$\left\{e^{\frac{4\pi}{6}\,i},\ -e^{\frac{4\pi}{6}\,i},\ e^{\frac{-4\pi}{6}\,i},\ -e^{\frac{-4\pi}{6}\,i}\right\}.$$

6. En posant $x_1 = e^{\theta\,i}$ et $x_2 = e^{-\theta\,i}$, on constate que

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2\cos(\theta), \\ x_1 \times x_2 &= 1. \end{aligned}$$

Ainsi, d'après les relations coefficients / racines, x_1 et x_2 sont racines du trinôme $X^2 - 2\cos(\theta)X + 1$. Finalement, l'ensemble des solutions recherchées est donc

$$\left\{e^{\theta\,i},\ e^{-\theta\,i}\right\}.$$

□

Solution de l'exercice 7.

1. D'après les propriétés du module, $|z|^n = |1| = 1$. Comme $|z|$ est un réel strictement positif, alors $|z| = 1$.

2. Comme $z^n = e^{\theta\,i} = 1 = e^{0\,i}$, alors

$$\begin{aligned} & n\theta \equiv 0 \ [2\pi] \\ \Leftrightarrow\ & \exists\, k \in \mathbb{Z}\ ;\ n\theta = 2k\pi \\ \Leftrightarrow\ & \exists\, k \in \mathbb{Z}\ ;\ \theta = \frac{2k\pi}{n}. \end{aligned}$$

3. a) L'ensemble des solutions de $z^2 = 1$ est $\{-1, 1\}$.

b) D'après la question précédente, si $z^3 = 1$, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $z = e^{\frac{2k\pi}{3}\,i}$. En utilisant la $2\pi\,i$-périodicité de l'exponentielle, l'ensemble des solutions est donc

$$\left\{1,\ e^{\frac{2\pi}{3}\,i},\ e^{\frac{4\pi}{3}\,i}\right\}.$$

Les images sont les sommets d'un triangle équilatéral.

c) D'après la question précédente, si $z^4 = 1$, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $z = e^{\frac{2k\pi}{4}\,i}$. En utilisant la $2\pi\,i$-périodicité de l'exponentielle, l'ensemble des solutions est donc

$$\left\{1,\ e^{\frac{2\pi}{4}\,i},\ e^{\frac{4\pi}{4}\,i},\ e^{\frac{6\pi}{4}\,i}\right\} = \{1,\ i,\ -1,\ -i\}.$$

Les images sont les sommets d'un carré.

d) D'après la question précédente, si $z^5 = 1$, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $z = e^{\frac{2k\pi}{5}\,i}$. En utilisant la $2\pi\,i$-périodicité de l'exponentielle, l'ensemble des solutions est donc

$$\left\{1,\ e^{\frac{2\pi}{5}\,i},\ e^{\frac{4\pi}{5}\,i},\ e^{\frac{6\pi}{5}\,i},\ e^{\frac{8\pi}{5}\,i}\right\}.$$

Les images sont les sommets d'un pentagone régulier. □

III - Géométrie

Solution de l'exercice 8.

a) On utilise la définition du module puis l'hypothèse :

$$\begin{aligned} |1+z|^2 + |1-z|^2 &= (1+z)\cdot(1+\overline{z}) + (1-z)\cdot(1-\overline{z}) \\ &= 1 + z + \overline{z} + |z|^2 + 1 - \overline{z} - z + |z|^2 \\ &= 4. \end{aligned}$$

b) Il s'agit du théorème de Pythagore ! En effet, les points d'affixes A, B et C d'affixes 1, z et -1 sont disposés sur le cercle unité et forment un triangle rectangle en le point d'affixe z. De plus, les points A et C sont les extrémités du diamètre de longeur 2. Le théorème de Pythagore assure donc que

$$\begin{aligned} BA^2 + BC^2 &= AC^2 \\ |z-1|^2 + |-1-z|^2 &= 2^2 \\ |1-z|^2 + |1+z|^2 &= 4. \end{aligned}$$

On remarque qu'il s'agit également d'un cas particulier de l'identité du parallélogramme. Si on note $A(1+z)$, $B(z-1)$, $C(-1-z)$ et $D(1-z)$, alors $ABCD$ forme un losange de côté 2. L'identité du parallélogramme assure que la somme des carrés des diagonales est égale à la somme des carrés des côtés, soit

$$\begin{aligned} AD^2 + BC^2 &= AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 \\ (2\,|1-z|)^2 + (2\,|1+z|)^2 &= 4 \times 2^2 \\ |1-z|^2 + |1+z|^2 &= 4. \end{aligned}$$

$\square$

Solution de l'exercice 9.

1. La transformation associée à f est donc la rotation de centre d'affixe $1+\mathrm{i}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

2. f est la translation d'affixe $12+16\,\mathrm{i}$.

3. Comme $f(z)=\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}\,\mathrm{i}}\,z+1$. Si $f(\omega)=\omega$, alors $\omega=\frac{1+\mathrm{i}}{2}$. Ainsi,

$$f(z)=\mathrm{i}(z-\omega)+\omega=\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}\,\mathrm{i}}(z-\omega)+\omega.$$

Ainsi, f est la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ dont le centre est d'affixe $\frac{1+\mathrm{i}}{2}$. $\square$

Solution de l'exercice 10. Un nombre complexe est réel si et seulement s'il est égal à son conjugué. Ainsi, en raisonnant par équivalences,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2 &\in \mathbb{R}\\
\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2 &= \overline{\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2}\\
\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2 &= \left(\frac{\overline{z}+1}{\overline{z}-1}\right)^2\\
(z+1)^2(\overline{z}-1)^2 &= (\overline{z}+1)^2(z-1)^2\\
(z^2+2z+1)(\overline{z}^2-2\overline{z}+1) &= (\overline{z}^2+2\overline{z}+1)(z^2-2z+1)\\
-2z^2\overline{z}+2z\overline{z}^2+2z-2\overline{z} &= -2z\overline{z}^2+2\overline{z}z^2+2\overline{z}-2z\\
z\overline{z}^2-z^2\overline{z}+z-\overline{z} &= 0\\
|z|^2\left(\overline{z}-z\right)+(z-\overline{z}) &= 0\\
(z-\overline{z})(1-|z|^2) &= 0.
\end{aligned}$$

Ainsi,

- $*$ soit $z-\overline{z}=0$, i.e. $z=\overline{z}$ et z est réel,
- $*$ soit $1-|z|^2=0$ soit $|z|=1$.

Comme $z\neq 1$, l'ensemble des solutions est donc

$$(\mathbb{R}\cup\{z\in\mathbb{C}\ ;\ |z|=1\})\setminus\{1\}\,.$$

$\square$