Quand la tribu n'est pas discrète

A. Camanes

Nous reprenons ici la preuve du théorème de Banach-Kuratowski (cf. [BK29]) en utilisant un vocabulaire plus conforme aux conventions actuelles. Nous verrons que ce théorème repose sur une propriété de théorie des ensembles (cf. Théorème 3). La démonstration de Banach et Kuratowski présente l'avantage de séparer la partie théorie des ensembles de la partie théorie de la mesure.

Théorème 1. *Si $E = [0,1]$, il n'existe pas de fonction $m : \mathscr{P}(E) \to \mathbb{R}_+$ non nulle telle que*

1. $\forall\, \omega \in E$, $m(\{\omega\}) = 0$,
2. *m soit σ-additive, i.e. pour toute famille $(A_i) \in \mathscr{P}(E)^{\mathbb{N}}$ d'ensembles deux à deux disjoints,*
$$m\left(\bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) = \sum_{i=0}^{+\infty} m(A_i).$$

Ce théorème a été étendu par Ulam à tout ensemble ayant la puissance du continu. Nous reprenons, dans la dernière partie, sa démonstration telle que présentée dans [Oxt71]. Les arguments sont essentiellement les mêmes que ceux de Banach-Kuratowski. La démonstration est plus efficace mais nécessite une bonne connaissance de la théorie des ensembles.

Théorème 2 (Ulam, 1930)**.** *Une mesure finie définie sur toutes les parties d'un ensemble X ayant la puissance du continu est identiquement nulle si elle s'annule sur les singletons.*

Commençons avec les raisons qui nous ont poussé à nous intéresser à cette question : pourquoi l'espace probabilisé associé au jeu de Pile ou Face ne peut pas être muni de la tribu la plus fine, i.e. la tribu des parties ?

1 Une application

Soient $\Omega = \{P,F\}^{\mathbb{N}^*}$, $p \in]0,1[$ et, pour tout n entier naturel non nul, $A_n = \{\omega \in \Omega\ ;\ \omega_n = P\}$. On suppose qu'il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ qui modélise le lancer d'une pièce (dés)équilibrée, i.e.

1. $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $A_n \in \mathscr{F}$ est mesurable,
2. $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(A_n) = p$,

3. les événements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont mutuellement indépendants.

Soit $\widetilde{\omega} \in \Omega$. D'une part,

$$\{\widetilde{\omega}\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{\omega \in \Omega \; ; \; \omega_n = \widetilde{\omega}_n\} \in \mathscr{F}$$

D'autre part, en notant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$C_n = \begin{cases} A_n & \text{si } \widetilde{\omega}_n = P \\ \overline{A_n} & \text{si } \widetilde{\omega}_n = F \end{cases},$$

d'après l'indépendance,

$$\forall\, N \in \mathbb{N}^*, \, \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{N} C_n\right) \leqslant \left(\max\{p, 1-p\}\right)^N$$

Ainsi, d'après la continuité décroissante des probabilités, $\mathbb{P}\left(\{\widetilde{\omega}\}\right) = 0$.
Le Théorème 1 de Banach-Kuratowski permet ainsi de montrer que $\mathscr{F} \neq \mathscr{P}(\Omega)$.

Bien sûr, la tribu engendrée par les cylindres, définie également comme la tribu des boréliens engendrée par la distance $d(\omega, \widetilde{\omega}) = \sum\limits_{i=0}^{+\infty} \frac{|\omega_i - \widetilde{\omega}_i|}{2^i}$ satisfait aux contraintes (cf. [AL06] Definition 6.3.4).

2 Théorème de Banach-Kuratowski

La démonstration du théorème repose sur le résultat de dénombrement suivant, où $\sqcup$ désigne les réunions d'ensembles deux à deux disjoints.

Théorème 3. *Soit $E = [0,1]$. Il existe une famille $(A_k^i)_{(k,i)\in\mathbb{N}^2}$ telle que*

1. $\forall\, i \in \mathbb{N},\, E = \bigsqcup\limits_{k\in\mathbb{N}^*} A_k^i$,
2. $\forall\, (k_n) \in \mathscr{S}(\mathbb{N}),\, \bigcap\limits_{i\in\mathbb{N}} \left(\bigsqcup\limits_{j=1}^{k_i} A_j^i\right)$ *est au plus dénombrable.*

Ce théorème sera montré dans un deuxième temps et nous commençons par l'utiliser pour prouver le Théorème 1 de Banach-Kuratowski.

2.1 Preuve du Théorème 1

Preuve du Théorème 1 de Banach-Kuratowski. Nous montrons ce théorème dans le cadre des mesures à valeurs positive, mais la démonstration de Banach et Kuratowski considère le cas de mesures quelconques. On note $(A_k^i)_{(k,i)\in\mathbb{N}^2}$ la suite d'ensembles définie par le Théorème 3.

1. On suppose par l'absurde que m n'est pas identiquement nulle. Il exite donc E_1 tel que $m(E_1) \neq 0$. Alors, d'après la σ-additivité et la positivité, $m(E) = m(E \backslash E_1) + m(E_1) \geqslant m(E_1) > 0$.

2. Pour toute suite (k_n) d'entiers naturels, $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} \bigsqcup_{j=1}^{k_i} A_j^i$ est au plus dénombrable. Comme m est σ-additive et nulle sur les singletons, alors, pour toute suite (k_n) d'entiers naturels,

$$m\left(\bigcap_{i \in \mathbb{N}} \bigsqcup_{j=1}^{k_i} A_j^i\right) = 0.$$

Nous allons, dans la suite, pour obtenir une contradiction, construire une suite (k_n) n'entiers naturels telle que

$$m\left(\bigcap_{i \in \mathbb{N}} \bigsqcup_{j=1}^{k_i} A_j^i\right) \geqslant \frac{m(E)}{2} > 0.$$

Pour cela, nous allons construire, par récurrence, une suite d'ensembles (R_i) telle que $m\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}^*} R_i\right) = \frac{m(E)}{2}$ et $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} \bigsqcup_{j=1}^{k_i} A_j^i = \overline{\bigcup_{i \in \mathbb{N}^*} R_i}$.

3. Comme $E = \bigsqcup_{k \in \mathbb{N}^*} A_k^1$, alors $m(E) = \sum_{k=1}^{+\infty} m(A_k^1)$. Ainsi, il existe k_1 tel que $\sum_{k=k_1+1}^{+\infty} m(A_k^1) \leqslant \frac{m(E)}{4}$.
On pose $R_1 = \bigsqcup_{k > k_1} A_k^1$.

4. Soit $i > 1$. On suppose $k_1, \ldots, k_{i-1}$ et $R_1, \ldots, R_{i-1}$ construits. Alors,

$$E \backslash \left(\bigcup_{j=1}^{i-1} R_j\right) = \left(\bigsqcup_{k \in \mathbb{N}^*} A_k^i\right) \backslash \left(\bigcup_{j=1}^{i-1} R_j\right).$$

Ainsi, la somme de la série suivante est finie

$$m\left(E \backslash \left(\bigcup_{j=1}^{i-1} R_j\right)\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} m\left(A_k^i \backslash \left(\bigcup_{j=1}^{i-1} R_j\right)\right)$$

et il existe $k_i \geqslant 1$ tel que

$$\sum_{k=k_i+1}^{+\infty} m\left(A_k^i \backslash \left(\bigcup_{j=1}^{i-1} R_j\right)\right) \leqslant \frac{m(E)}{2^{i+1}}.$$

On pose $R_i = \bigsqcup_{k > k_i} A_k^i$.

5. D'après les définitions précédentes et la σ-additivité de m,

$$m\left(R_i\backslash\bigcup_{j=1}^{i-1}R_j\right)=m\left(\left(\bigsqcup_{k>k_i}A_i\right)\backslash\bigcup_{j=1}^{i-1}R_j\right)\leqslant\frac{m(E)}{2^{i+1}}.$$

Ainsi, en créant une suite d'ensembles deux à deux disjoints,

$$m\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}^*}R_i\right)=m\left(\bigsqcup_{i\in\mathbb{N}^*}\left(R_i\backslash\bigcup_{j=1}^{i-1}R_j\right)\right)=\sum_{i=1}^{+\infty}m\left(R_i\backslash\bigcup_{j=1}^{i-1}R_j\right)\leqslant\frac{m(E)}{2}.$$

6. Il suffit maintenant de montrer que $E=\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}^*}R_i\right)\bigsqcup\left(\bigcap_{i\in\mathbb{N}}\bigcup_{j=1}^{k_i}A_j^i\right)$.

Rappelons que $E=\left(\bigsqcup_{k=1}^{k_i}A_k^i\right)\bigsqcup\left(\bigsqcup_{k>k_i}A_k^i\right)=\left(\bigsqcup_{k=1}^{k_i}A_k^i\right)\bigsqcup R_i$.
Ainsi, $x\in E\backslash\bigcup_{i\in\mathbb{N}^*}R_i$ si et seulement si pour tout i entier naturel non nul, $x\in E\backslash R_i$ si et seulement si pour tout i entier naturel non nul, $E\in\bigsqcup_{j=1}^{k_i}A_j^i$ si et seulement si $x\in\bigcap_{i\in\mathbb{N}}\bigsqcup_{j=1}^{k_i}A_j^i$.
Finalement, $m\left(\bigcap_{i\in\mathbb{N}}\bigsqcup_{j=1}^{k_i}A_j^i\right)\geqslant\frac{m(E)}{2}>0$ et on obtient une contradiction. $\square$

2.2 Preuve du Théorème 3

La preuve du Théorème 3 de décomposition repose sur l'Hypothèse du Continu. Banach et Kuratowski démontrent même qu'elle y est équivalente. Cette preuve repose sur l'existence d'un bon ordre sur $[0,1]$ dont les segments initiaux sont dénombrables. Rappelons quelques définitions et résultats.

* Un ensemble E **bien ordonné** est un ensemble muni d'une relation d'ordre telle que toute partie non vide de E admet un plus petit élément.
* Un ensemble bien ordonné est un ensemble **totalement ordonné** car toutes les paires $\{x,y\}$ admettent un élément minimal.
* Dans la preuve qui suit, nous allons utiliser un bon ordre sur $\mathbb{R}$. L'hypothèse du continu assure qu'il existe un bon ordre $\prec$ sur $\mathbb{R}$ tel que, pour tout $y\in\mathbb{R}$, l'ensemble $\{x\in\mathbb{R}\ ;\ x\prec y\}$ soit au plus dénombrable (cf. [Kri98] Chapitre 2).

Preuve du Théorème 3. Commençons par des notations.

1. Comme $\mathscr{S}(\mathbb{N})$ et $[0,1]$ sont équipotents, on note $\mathscr{S}(\mathbb{N})=\{S_x,\ x\in[0,1]\}$.
On utilise sur $[0,1]$ la relation $\prec$ qui définit un bon ordre tel que, pour tout $\beta\in[0,1]$, $\{\alpha\in[0,1]\ ;\ \alpha\prec\beta\}$ soit au plus dénombrable.

Pour $S = (s_n)$ et $T = (t_n)$ deux suites à valeurs entières, on note $S \leqslant T$ dès que $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $s_n \leqslant t_n$.

2. Nous allons définir par induction sur α une fonction ξ_α qui satisfait :

$$\forall\ \beta \prec \alpha, \begin{cases} S_{\xi_\alpha} & \nleqslant S_{\xi_\beta} \\ S_{\xi_\alpha} & \neq S_{\xi_\beta} \end{cases}$$

En effet, supposons construite ξ sur les éléments de l'ensemble $\{\beta \in [0,1]\ ;\ \beta \prec \alpha\}$. Cet ensemble est au plus dénombrable, d'après le choix du bon ordre sur $[0,1]$. Ainsi, l'ensemble $I_\alpha = \left\{S_\beta, S_{\xi_\beta}\ ;\ \beta \prec \alpha\right\}$ est au plus dénombrable. On peut ainsi noter $I_\alpha = \left\{S_i = (s_1^i, s_2^i, \ldots)\ ;\ i \in \mathbb{N}\right\}$. Notons $S_{\xi_\alpha} = (r_1, r_2, \ldots)$ telle que, pour tout $i \in \mathbb{N}$, $r_i = s_i^i + 1$. Alors, en considérant un argument diagonal, pour tout $\beta \prec \alpha$, $S_{\xi_\alpha} \nleqslant S_\beta$ et $S_{\xi_\alpha} \neq S_{\xi_\beta}$.

On note

$$\mathscr{F} = \{S_{\xi_\alpha},\ \alpha \in [0,1]\}\,.$$

Comme $\mathscr{F}$ est en bijection avec $[0,1]$, on note

$$\mathscr{F} = \{T_x = (n_1^x, n_2^x, \ldots),\ x \in [0,1]\}$$

3. D'une part, $\{\alpha \in [0,1]\ ;\ S_{\xi_\alpha} \leqslant S_\beta\} \subset \{\alpha \in [0,1]\ ;\ \alpha \preceq \beta\}$ est au plus dénombrable.

4. D'autre part, en notant $A_k^i = \{x \in [0,1]\ ;\ k = n_i^x\}$, alors

* Si $k \neq \ell$, alors $A_k^i \bigcap A_\ell^i = \emptyset$,
* $\bigsqcup\limits_{k \in \mathbb{N}} A_k^i = [0,1]$,
* Soient $S = (k_1, k_2, \ldots) \in \mathscr{S}(N)$ et $x \in \bigcap\limits_{i \in \mathbb{N}} \left(\bigsqcup\limits_{j \in [\![1,k_i]\!]} A_j^i \right)$. Alors, pour tout $i \in \mathbb{N}$, il existe $j \in [\![1, k_i]\!]$ tel que $x \in A_j^i$, soit $n_i^x = k \leqslant k_i$.
  Ainsi, $T_x \leqslant S$. Or, $\{x \in [0,1]\ ;\ T_x \leqslant S\}$ est au plus dénombrable. Ainsi, $\bigcap\limits_{i \in \mathbb{N}} \left(\bigsqcup\limits_{j \in [\![1,k_i]\!]} A_j^i \right)$ est au plus dénombrable.

□

3 Preuve du Théorème 2

Ces notes reprennent intégralement la démonstration du théorème suivant, dû à Ulam (1930) présentée dans [Oxt71] Theorem 5.6. Ce théorème repose sur la même propriété d'existence d'un bon ordre qui est la conséquence de l'Hypothèse du Continu.

Démonstration. Comme X possède la puissance du continu, il existe un bon ordre $<$ sur X tel que, pour tout $y \in X$, $I_y = \{x \in X\ ;\ x < y\}$ est dénombrable. On note f_y une fonction bijective de I_y sur une partie de $\mathbb{N}$.

Pour tout entier naturel n et tout $x \in X$, posons

$$F_x^n = \{y \in X \ ; \ x < y \text{ et } f_y(x) = n\}\,.$$

Nous pouvons représenter ces ensembles dans un tableau dont le nombre de lignes est dénombrable et le nombre de colonnes a la puissance du continu :

$$\begin{matrix} F_{x_1}^1 & F_{x_2}^1 & \cdots & F_x^1 & \cdots \\ F_{x_1}^2 & F_{x_2}^2 & \cdots & F_x^2 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ F_{x_1}^n & F_{x_2}^n & \cdots & F_x^n & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{matrix}$$

* Si $x \neq x'$ et $i \in \mathbb{N}$, alors $F_x^i \cap F_{x'}^i = \emptyset$. En effet, si $y \in F_x^i \cap F_{x'}^i$, alors $f_y(x) = f_y(x') = i$. On obtient ainsi une contradiction car f_y est injective.
* Soit $x \in X$. Montrons que $X \backslash \left(\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} F_x^n\right)$ est au plus dénombrable. En effet, si $x < y$, alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $f_y(x) = n$ et $y \in \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} F_x^n$.

  Ainsi, $X \backslash \left(\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} F_x^n\right) \subset \{y \in X \ ; \ y \leqslant x\}$ qui est au plus dénombrable.

D'une part, m est σ-additive, finie et la réunion $\bigsqcup\limits_{x \in X} F_x^i$ est disjointe. Ainsi, il existe au plus un nombre dénombrable d'éléments $x \in X$ tels que $m(F_x^i) > 0$ [1]. Comme X n'est pas dénombrable, il existe une colonne dont tous les ensembles sont de mesure nulle, i.e. il existe $x_0 \in X$ tel que, pour tout $i \in \mathbb{N}$, $m(F_{x_0}^i) = 0$. Ainsi, $\bigsqcup\limits_{i \in \mathbb{N}} F_{x_0}^i$ est dénombrable, donc de mesure nulle. Son complémentaire dans X est également dénombrable, donc de mesure nulle. D'après la σ-additivité, m est donc identiquement nulle. $\square$

1. Il s'agit ici de l'argument classique qui assure que si la somme d'une famille est finie, il y a un nombre fini de termes plus grands que 1, un nombre fini de termes plus grands que $1/2, \ldots$, un nombre fini de termes plus grand que $n, \ldots$ et donc au plus un nombre dénombrable de termes non nuls.

Références

[AL06] K.B. Athreya et S.N. Lahiri. *Measure Theory and Probability Theory*. Springer Texts in Statistics. Springer, 2006.

[BH03] Tomek Bartoszyński et Lorenz Halbeisen. "On a Theorem of Banach and Kuratowski and K-Lusin Sets". In : *Rocky Mountain Journal of Mathematics* 33 (déc. 2003).

[BK29] S. Banach et K. Kuratowski. "Sur une généralisation du problème de la mesure". In : *Fund. Math.* 14 (nov. 1929), p. 127-131.

[Kri98] J.L. Krivine. *Théorie des ensembles*. Nouvelle bibliothèque mathématique. Cassini, 1998.

[Oxt71] J.C. Oxtoby. *Measure and Category : A Survey of the Analogies between Topological and Measure Spaces*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 1971.

[Vit05] G. Vitali. *Sul problema della misura dei Gruppi di punti di una retta : Nota*. Tip. Gamberini e Parmeggiani, 1905.