À propos des coefficients binomiaux
ou
dénombrer plutôt que calculer

Alain Camanes, Henri Lemberg, Magali Rocher

Table des matières

Dans ces notes, nous présentons les coefficients binomiaux et nous démontrons leurs principales propriétés. Les coefficients binomiaux étant des objets combinatoires, nous privilégierons ici le dénombrement aux calculs et nous nous efforcerons d'éviter le recours aux factorielles ! La stratégie : considérer un ensemble d'objets et compter de deux manières différentes le nombre d'éléments qu'il contient afin d'obtenir une relation arithmétique !

Pour rendre plus accessible les raisonnements et éviter le vocabulaire de la théorie des ensembles, nous remplacerons la notion d'*ensemble* par celle de *club de mathématiques* d'un établissement scolaire et la notion d'*élément* par celle d'*élève*. Nous présenterons cependant, à la fin de chaque section, une démonstration plus formelle des relations présentées.

1 Les coefficients binomiaux : la définition et un exemple

Comment définit-on formellement les coefficients binomiaux ?

> Soit n un entier naturel non nul, E un ensemble contenant n éléments et k un entier naturel. L'entier $\displaystyle\binom{n}{k}$, à prononcer « k *parmi* n », est le nombre de parties de E à k éléments.

1.1 Un exemple

On considère un établissement scolaire qui comporte un club de mathématiques auquel sont inscrits n élèves. Le chef d'établissement souhaite envoyer k de ces élèves aux Olympiades de Mathématiques. L'entier $\displaystyle\binom{n}{k}$ est le nombre d'équipes différentes composées de k élèves qu'il peut constituer.

Supposons par exemple que le club de mathématiques soit composé de quatre élèves dont les prénoms sont : Amandine, Bruno, Clotilde, Dylan. La décision de la composition de l'équipe doit être prise par l'équipe pédagogique, mais c'est le chef d'établissement qui devra ensuite communiquer sa composition au jury. Pour préparer au mieux la prise de décision, le chef d'établissement décide d'écrire au préalable la composition de chacune des équipes qu'il est susceptible de communiquer au jury.

On désigne les élèves par leur initiale et l'équipe sera notée entre accolades.

- Si on doit envoyer un unique élève aux Olympiades. Nous devons choisir 1 élève parmi les 4 élèves du club. Nous avons le choix entre envoyer : soit Amandine, soit Bruno, soit Clotilde, soit Dylan (voir la Figure 1). Il y a ainsi 4 messages distincts qui peuvent être envoyés et $\binom{4}{1} = 4$.
  Les différentes équipes qui peuvent être envoyées seront ainsi notées $\{A\}$, $\{B\}$, $\{C\}$, $\{D\}$.

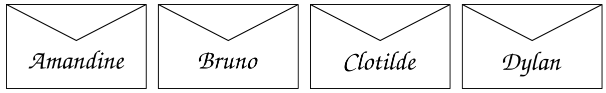

FIGURE 1 – Équipes de 1 élève pouvant être envoyées aux Olympiades

- Si on doit envoyer 2 élèves aux Olympiades. Nous devons choisir 2 élèves parmi les 4 élèves du club. Nous avons le choix entre envoyer : soit Amandine et Bruno, soit Amandine et Clotilde, soit Amandine et Dylan, soit Bruno et Clotilde, soit Bruno et Dylan, soit Clotilde et Dylan (voir la Figure 2). Il y a ainsi 6 messages possibles et $\binom{4}{2} = 6$.

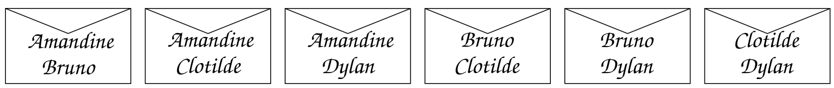

FIGURE 2 – Équipes de 2 élèves pouvant être envoyées aux Olympiades

  Les différentes équipes qui peuvent être envoyées seront ainsi notées $\{A, B\}$, $\{A, C\}, \{A, D\}, \{B, C\}, \{B, D\}, \{C, D\}$.

  Les coefficients binomiaux sont parfois introduits comme un nombre de chemins dans un graphe particulier. En effet, lors de la constitution de l'équipe, on peut représenter les choix susceptibles d'être effectués dans le graphe suivant : partant d'Amandine, soit on choisit de la sélectionner (branche de gauche), soit on choisit de ne pas la sélectionner (branche de droite). On continue ensuite avec Bruno, puis Clotilde et enfin Dylan. Compter le nombre d'équipes revient donc à compter un nombre de chemins dans ce graphe (voir la Figure 3).
- Si on doit envoyer 3 élèves aux Olympiades. Nous devons choisir 3 élèves parmi les 4 élèves du club. Les équipes possibles sont $\{A, B, C\}, \{A, B, D\}, \{A, C, D\}, \{B, C, D\}$. Il y a ainsi 4 messages distincts qui peuvent être envoyés et $\binom{4}{3} = 4$.

Exercice 1. *Combien d'équipes formées de 4 élèves peuvent être envoyées aux Olympiades ? Quelle est donc la valeur de* $\binom{4}{4}$ *?*

1.2 Quelques cas particuliers

Supposons que l'établissement décide finalement de ne pas envoyer d'équipe aux Olympiades. Il y a un unique message à envoyer aux organisateurs : celui qui indique qu'aucun élève ne se rendra à la compétition. On convient donc que $\binom{4}{0} = 1$ et en généralisant pour un entier naturel n quelconque :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \binom{n}{0} = 1.$$

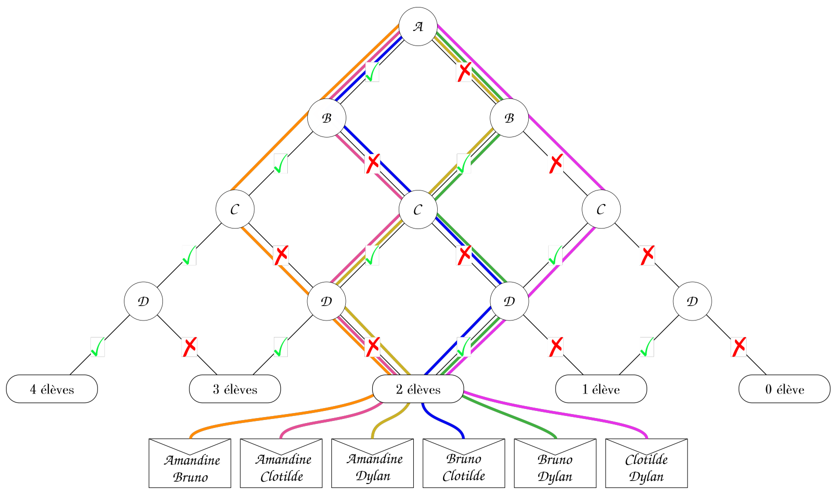

FIGURE 3 – Représentation du processus de décision permettant de lister les équipes de 2 élèves pouvant être envoyées aux Olympiades.

Si, au contraire, les organisateurs demandent un nombre d'élèves plus grand que celui que compte le club, alors aucune équipe ne peut être constituée. Ainsi, $\binom{4}{5} = \binom{4}{6} = \cdots = 0$ et en généralisant pour un entier naturel n quelconque :

$$\forall\,(n,k) \in \mathbb{N}^2,\; k > n,\; \binom{n}{k} = 0.$$

Si le club est composé de n élèves et que la taille de l'équipe est également de n élèves, il y a une seule équipe possible : envoyer tous les élèves aux Olympiades. Ainsi, le cas $n = 0$ étant une convention,

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\; \binom{n}{n} = 1.$$

Si les organisateurs ne doivent envoyer qu'un seul élève, il y a autant de choix d'équipes que d'élèves dans le club :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\; \binom{n}{1} = n.$$

Si les organisateurs doivent envoyer une équipe constituée d'exactement 2 élèves choisis parmi les n élèves du club :

- il y a n possibilités pour choisir le premier élève de l'équipe,
- il n'y a plus que $n-1$ possibilités pour choisir le second élève de l'équipe,
- chaque équipe est comptée alors deux fois car il n'y a pas d'ordre entre les élèves choisis. Par exemple, les équipes $\{A, B\}$ et $\{B, A\}$ sont identiques.

Ainsi,

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

1.3 Les objectifs

Pour chacune des propriétés des coefficients binomiaux, nous proposerons une démonstration plus formelle. Le texte contenu dans ces encadrés est réservé aux lecteurs qui ont déjà des notions de théorie des ensembles. Introduisons ici les notations qui seront utilisées.

Notations et définitions.
On note E un ensemble fini non vide.
$\mathcal{P}(E)$ désigne l'ensemble des parties de E.
$\mathcal{P}_k(E)$ désigne l'ensemble des parties de E à k éléments.
Le cardinal d'une partie A de E sera noté $|A|$. Le cardinal de l'ensemble vide est égal à 0.
Le complémentaire d'une partie A de E sera noté $\overline{A}$.
L'application identité sera notée Id.
Pour deux entiers $n \leqslant m$, on note $[\![n, m]\!] = \{n, n+1, \dots, m\}$ l'ensemble des entiers compris entre n et m.
Résultats utilisés.
D'après la définition, si n désigne le cardinal de E, alors $|\mathcal{P}_k(E)| = \binom{n}{k}$.
Deux ensembles finis E et F sont de même cardinal si et seulement s'il existe une bijection φ de l'un dans l'autre.
Si A et B sont deux parties de E disjointes, i.e. $A \cap B = \emptyset$, on note $A \sqcup B$ leur réunion. Alors $|A \sqcup B| = |A| + |B|$.
Si E et F sont deux ensembles finis, alors $|E \times F| = |E| \times |F|$.

2 Ceux qui partent et ceux qui restent : la formule des compléments

Vous remarquerez que le chef d'établissement dispose de deux manières de fonctionner pour définir l'équipe de k élèves qui représentera l'établissement aux Olympiades. Chacune de ces stratégies conduira à un même nombre d'équipes pouvant représenter le club.

Ceux qui restent. Il peut envoyer un message contenant la liste des k élèves qui se rendront aux Olympiades. Il y a $\binom{n}{k}$ messages possibles.

Ceux qui partent. Il peut envoyer un message contenant la liste des $n-k$ élèves qui **ne** se rendront **pas** aux Olympiades. Il y a $\binom{n}{n-k}$ messages possibles.

Nous avons utilisé deux stratégies pour compter le nombre total de messages qui peuvent être constitués afin d'envoyer k élèves aux Olympiades. Ainsi,

$$\forall (n,k) \in \mathbb{N}^2,\ k \leqslant n,\ \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

En reprenant les valeurs précédentes, si l'équipe envoyée est constituée de 3 élèves, on a bien $\binom{4}{1} = \binom{4}{3} = 4$.

L'application

$$\varphi\ :\ \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{P}_k(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}_{n-k}(E) \\ A & \longmapsto & \overline{A} \end{array} \right.$$

est une bijection.

En effet

- φ est injective : si $\varphi(A) = \varphi(B)$, alors $\overline{A} = \overline{B}$ et

$$A = \overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}} = B.$$

- φ est surjective : soit $C \in \mathcal{P}_{n-k}(E)$. Alors $\overline{C} \in \mathcal{P}_k(E)$ et un antécédent de C est $\overline{C}$.

On aurait également pu montrer que φ est bijective en remarquant que $\varphi \circ \varphi = \mathrm{Id}$, soit $\varphi^{-1} = \varphi$.
Comme φ est bijective, $|\mathscr{P}_k(E)| = |\mathscr{P}_{n-k}(E)|$ soit $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

3 Toutes les équipes possibles : une formule du binôme

Supposons que le chef d'établissement n'ait pas de contrainte quant à la taille de l'équipe qu'il envoie : elle peut être constituée d'un nombre d'élèves compris entre 0 - aucune équipe n'est envoyée - et n - tous les membres du club sont envoyés.

Comptons de deux manières différentes le nombre de messages que le chef d'établissement peut envoyer.

La vision par équipes. Il commence par choisir le nombre k d'élèves partant aux Olympiades. Il a alors $\binom{n}{k}$ messages possibles. Comme k (la taille de l'équipe) peut prendre toutes les valeurs entre 0 et n, le nombre total de messages à préparer est égal à $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$.

La vision par individu. Il peut, pour chacun des élèves, choisir si *oui* ou *non* il est sélectionné. Pour chacun des élèves, il y a donc deux possibilités : l'inscrire ou ne pas l'inscrire sur le message envoyé aux organisateurs (voir la Figure 4). Le nombre total de messages à préparer est alors égal à : $\underbrace{2 \times 2 \times \cdots \times 2}_{\text{nombre d'élèves}} = 2^n$.

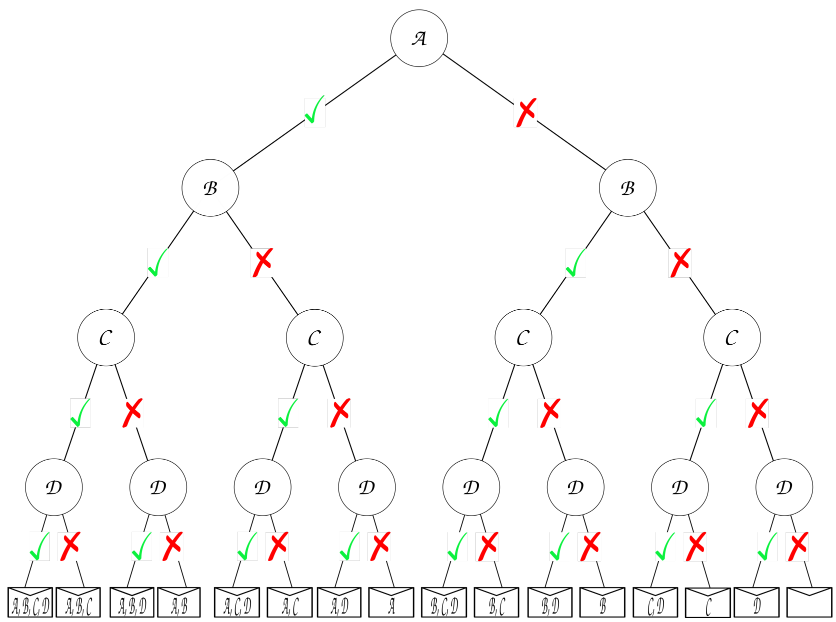

FIGURE 4 – Représentation des choix successifs effectués par le chef d'établissement et du message écrit à l'issue de ces choix.

Nous avons utilisé deux stratégies pour compter le nombre total d'équipes qui peuvent être constituées lorsque la taille de l'équipe n'est pas fixée par les organisateurs. Ainsi, nous obtenons la relation :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

Montrons par double inclusion que

$$\mathcal{P}(E) = \bigsqcup_{k=0}^{n} \mathcal{P}_k(E).$$

- Soit $A \in \mathcal{P}(E)$. Alors A est un sous ensemble de E et son cardinal k appartient à $[\![0, n]\!]$. Donc il existe $k \in [\![0, n]\!]$ tel que $A \in \mathcal{P}_k(E)$.
- Soit $A \in \bigsqcup\limits_{k=0}^{n} \mathcal{P}_k(E)$. Par définition de l'union de sous-ensembles, il existe $k \in [\![0, n]\!]$ tel que $A \in \mathcal{P}_k(E) \subset \mathcal{P}(E)$.

On a donc démontré l'égalité par double inclusion.

Les ensembles $(\mathcal{P}_k(E))_{0 \leqslant k \leqslant n}$ sont deux à deux disjoints. Ainsi le cardinal de $\bigsqcup\limits_{k=0}^{n} \mathcal{P}_k(E)$ est égal à la somme des cardinaux de chacun des éléments de l'union, soit $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$.

Montrons maintenant que le cardinal de $\mathcal{P}(E)$ est égal à 2^n. Pour cela, notons $E = \{x_1, \ldots, x_n\}$ et $\varphi : \mathcal{P}(E) \longrightarrow \{0, 1\}^n$ définie pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$ par

$$\varphi(A) = (a_1, \ldots, a_n),$$

où

$$a_i = \begin{cases} 0 & \text{si } x_i \notin A \\ 1 & \text{si } x_i \in A \end{cases}.$$

L'application φ est une bijection de $\mathcal{P}(E)$ sur $\{0, 1\}^n$. En effet, sa bijection réciproque est $\varphi^{-1} : (a_1, \ldots, a_n) \longmapsto \{x_i \in E \ ; \ a_i = 1\}$.

Ainsi $|\mathcal{P}(E)| = 2^n$ et

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.$$

La relation précédente est un cas particulier de la formule du binôme de Newton [1] qui s'énonce ainsi :

$$\forall\, (a, b) \in \mathbb{R}^2,\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ (a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Exercice 2. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = [\![1, n]\!]$. On note*

$$\mathcal{P} = \{A \in E \ ; \ |A| \text{ est pair}\} \text{ et } \mathcal{I} = \{A \in E \ ; \ |A| \text{ est impair}\}.$$

1. *Montrer qu'il existe une bijection entre $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$.*

1. Nommée en l'honneur du scientifique anglais Isaac Newton (1642-1727).

2. *En déduire que* $\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} = 2^{n-1}$*, où* $\lfloor n/2 \rfloor$ *désigne la partie entière de* $n/2$*, c'est-à-dire le plus grand entier inférieur ou égal à* $n/2$*.*
3. *En déduire que* $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$*.*

4 Le dilemme du tricheur : la formule du triangle de Pascal

Un des élèves a rendu un dernier devoir de mathématiques remarqué. L'équipe pédagogique est divisée sur son cas : a-t-il triché ? Le chef d'établissement doit constituer une équipe de k élèves. En attendant la décision de l'équipe pédagogique, il va donc préparer deux types de messages : ceux dont les équipes contiennent l'élève suspect et ceux dont les équipes ne contiennent pas cet élève.

- Si l'élève est dans l'équipe sélectionnée, il reste, pour compléter l'équipe, $k-1$ élèves à choisir parmi les $n-1$ élèves restants. Il y a donc $\binom{n-1}{k-1}$ équipes de k élèves qui contiennent l'élève suspect.
- Si l'élève n'est pas dans l'équipe sélectionnée, il faut choisir k élèves parmi les $n-1$ élèves restants (l'élève suspect restera au lycée). Il y a donc $\binom{n-1}{k}$ équipes de k élèves qui **ne** contiennent **pas** l'élève suspect.

Nous avons utilisé deux stratégies pour compter le nombre d'équipes à k élèves que le chef d'établissement peut envoyer aux Olympiades. Ainsi, nous obtenons la relation

$$\forall\, (n,k) \in \mathbb{N}^2,\ k \leqslant n,\ \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \binom{n}{k}.$$

Prenons l'exemple d'un club de 5 élèves : Amandine, Bruno, Clotilde, Dylan, Élise. Si l'équipe contient 3 élèves, les équipes possibles sont au nombre de $\binom{5}{4} = 10$:

$$\{A,B,C\},\ \{A,B,D\},\ \{A,B,E\},\ \{A,C,D\},\ \{A,C,E\},$$
$$\{A,D,E\},\ \{B,C,D\},\ \{B,C,E\},\ \{B,D,E\},\ \{C,D,E\}.$$

Si Bruno est l'élève suspect, on peut séparer les équipes en deux (voir la Figure 5) :

- celles qui contiennent Bruno, au nombre de $\binom{4}{2} = 6$:
  $\{A,B,C\}$, $\{A,B,D\}$, $\{A,B,E\}$, $\{B,C,D\}$, $\{B,C,E\}$, $\{B,D,E\}$,
- celles qui ne contiennent pas Bruno, au nombre de $\binom{4}{3} = 4$:
  $\{A,C,D\}$, $\{A,C,E\}$, $\{A,D,E\}$, $\{C,D,E\}$.

Cette formule, nommée formule du triangle de Pascal [2], permet d'exprimer le nombre d'équipes d'un club contenant n élèves en fonction des nombres

2. Nommée en l'honneur du scientifique français Blaise Pascal (1623-1662).

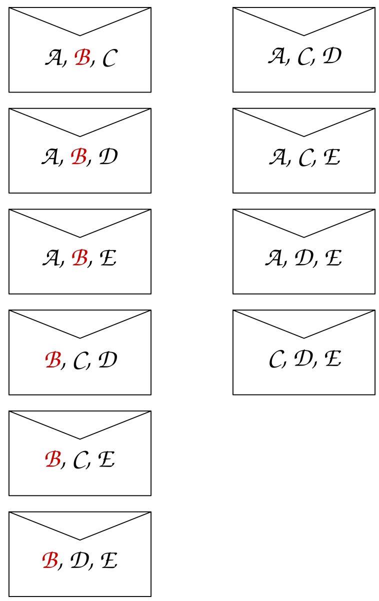

FIGURE 5 – La pile de gauche contient les messages où Bruno a été sélectionné ; la pile de droite ceux où Bruno n'a pas été sélectionné.

d'équipes d'un club contenant $n-1$ élèves. Elle permet donc de calculer les coefficients binomiaux par récurrence. Ces calculs peuvent être représentés sous forme d'un triangle (voir la Figure 6).

n \ k	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

FIGURE 6 – Triangle de Pascal d'ordre 6

Soit $a \in E$ et $\varphi : \mathcal{P}_k(E) \longrightarrow \mathcal{P}_k(E\backslash\{a\}) \bigsqcup \mathcal{P}_{k-1}(E\backslash\{a\})$ définie pour tout $A \in \mathcal{P}_k(E)$ par

$$\varphi(A) = \begin{cases} A & \text{si } a \notin A \\ A \setminus \{a\} & \text{si } a \in A \end{cases}.$$

- Montrons que φ est surjective.
  — Si $B \in \mathcal{P}_k(E\backslash\{a\})$, alors $\varphi(B) = B \in \mathcal{P}_k(E)$.
  — Si $B \in \mathcal{P}_{k-1}(E\backslash\{a\})$, alors $A = B \sqcup \{a\} \in \mathscr{P}_k(E)$ et $\varphi(A) = B$.
- Montrons que φ est injective. Soit A_1, A_2 deux éléments de $\mathcal{P}_k(E)$ tels que $B = \varphi(A_1) = \varphi(A_2)$.
  1. Si $B \in \mathcal{P}_k(E\backslash\{a\})$, alors $\varphi(A_1) = A_1$ et $\varphi(A_2) = A_2$, soit $A_1 = B = A_2$.
  2. Si $B \in \mathcal{P}_{k-1}(E\backslash\{a\})$, alors $a \in A_1$ et $a \in A_2$, soit $B = A_1\backslash\{a\} = A_2\backslash\{a\}$ et donc $A_1 = A_2$.

On a donc

$$|\mathcal{P}_k(E)| = |\mathcal{P}_k(E\backslash\{a\})| + |\mathcal{P}_{k-1}(E\backslash\{a\})|$$

et

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

La relation du triangle de Pascal permet de construire une fonction récursive qui calcule les coefficients binomiaux successifs :

```
def pascal_rec(k, n):
    if k == 0:
        return 1
    elif k > n:
        return 0
    else:
        return pascal_rec(k, n-1) + pascal_rec(k-1, n-1)
```

Cependant, cette fonction est peu efficace et le nombre d'appels récursifs nécessaires pour calculer $\binom{n}{k}$ est de l'ordre de $\binom{n}{k}$.

Ce que nous perdons en temps, nous pouvons utiliser de l'espace pour le gagner. On peut ainsi utiliser la formule du triangle de Pascal pour calculer efficacement les coefficients binomiaux en stockant les résultats précédemment obtenus dans un tableau.

```
def pascal_iteratif(k, n):
    if k > n:
        return 0
```

```
    L = [[1], [1, 1]]
    for i in range(2, n+1):
        L.append((i+1) * [1])
        for j in range(1, i):
            L[i][j] = L[i-1][j] + L[i-1][j-1]
    return L[n][k]
```

Pour limiter la consommation de mémoire de ce code, nous pourrions nous limiter au stockage de la dernière liste calculée.

5 Démocratique ou autocratique : la formule du capitaine

Le comité organisateur des Olympiades modifie son règlement et décide que toute équipe doit contenir un capitaine. Le chef d'établissement doit maintenant envoyer une liste de k élèves dont l'un est un capitaine. Pour préparer l'ensemble des messages possibles, il a deux possibilités (voir la Figure 7) :

La voie autocratique.
- Le chef d'établissement choisit d'abord un capitaine parmi les élèves. Il a n possibilités pour cela.
- Le capitaine choisit ensuite autocratiquement les $k-1$ élèves manquants pour constituer le reste de l'équipe parmi les $n-1$ élèves restants. Il a $\binom{n-1}{k-1}$ possibilités pour cela.

Il y a ainsi $n \times \binom{n-1}{k-1}$ équipes possibles.

La voie démocratique.
- Le chef d'établissement choisit les k élèves constituant l'équipe. Il a $\binom{n}{k}$ possibilités pour cela.
- Les membres de l'équipe élisent ensuite démocratiquement un capitaine parmi eux. Il y a k possibilités pour cela.

Il y a ainsi $k \times \binom{n}{k}$ équipes possibles.

Nous avons utilisé deux stratégies pour compter le nombre d'équipes à k élèves contenant un capitaine. Ainsi, nous obtenons la relation :

$$\forall (n,k) \in \mathbb{N}^2,\, k \leqslant n,\, n \times \binom{n-1}{k-1} = k \times \binom{n}{k}.$$

Cette formule, notée $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$ est parfois appelée formule d'émission/absorption.

Montrons que

$$\bigsqcup_{a\in E} \left(\{a\} \times \mathcal{P}_{k-1}(E\backslash\{a\})\right) = \bigsqcup_{B\in\mathcal{P}_k(E)} \left(\bigsqcup_{a\in B} \{a\} \times (B\backslash\{a\})\right).$$

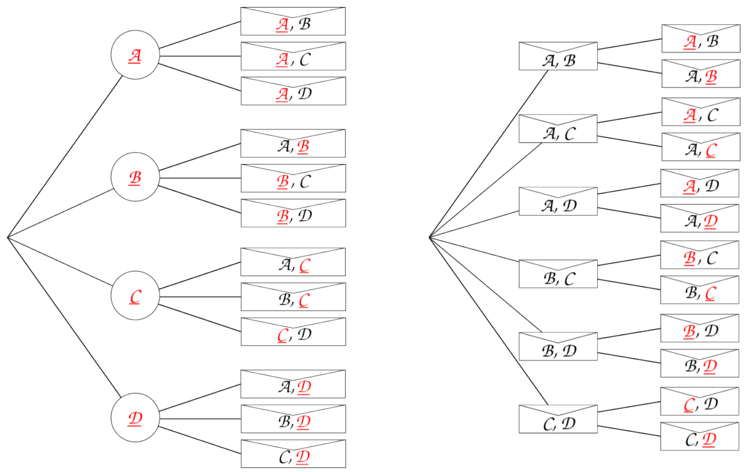

FIGURE 7 – Dans l'arbre de gauche, on choisit le capitaine (en souligné), puis le reste de l'équipe. Dans l'arbre de droite, on choisit l'équipe, puis le capitaine en son sein.

On raisonne par double inclusion :

($\subset$) Soit $A \in \bigsqcup_{a\in E} \{a\} \times \mathcal{P}_{k-1}(E\backslash\{a\})$. Il existe $C \in \mathscr{P}_{k-1}(E\backslash\{a\})$ tel que $A = (a, C)$. On pose alors $B = C \bigsqcup \{a\}$. Ainsi, $B \in \mathscr{P}_k(E)$ et $A = (a, B\backslash\{a\})$.

($\supset$) Soit $A \in \bigsqcup_{B\in\mathcal{P}_k(E)} \left(\bigsqcup_{a\in B} \{a\} \times (B\backslash\{a\}) \right)$. Il existe $B \in \mathscr{P}_k(E)$ et $a \in B$ tel que $A = (a, B\backslash\{a\})$. Ainsi, $A \in \{a\} \times \mathscr{P}_{k-1}(E\backslash\{a\})$.

La formule du capitaine peut être utilisée pour calculer récursivement les coefficients binomiaux avec une complexité linéaire.

```
def capitaine(k, n):
    if k == 0 or n == 0:
        return 1
    else:
        return (n * capitaine(k-1, n-1)) // k
```

On prendra garde à l'ordre des opérations dans le produit.

Exercice 3. *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n+1$ divise $\binom{2n}{n}$.*

Remarquons enfin que cette relation peut être généralisée. Supposons maintenant que l'organisation des Olympiades demande des équipes de k élèves, chaque équipe devant contenir i élèves avec un statut particulier (nous les appellerons les *capitaines*). Il y a alors toujours deux manières de compter le nombre de ces équipes :

La voie autocratique.
- On choisit les i capitaines parmi les n élèves. Il y a pour cela $\binom{n}{i}$ choix possibles.
- Ces i élèves choisissent ensuite les $k-i$ élèves constituant le reste de l'équipe (parmi les $n-i$ élèves restants dans le club). Il y a pour cela $\binom{n-i}{k-i}$ choix possibles.

Il y a ainsi $\binom{n}{i} \times \binom{n-i}{k-i}$ équipes possibles.

La voie démocratique.
- On choisit les k élèves constituant l'équipe. Il y a $\binom{n}{k}$ choix possibles.
- Les k élèves de l'équipe élisent les i capitaines en leur sein. Il y a pour cela $\binom{k}{i}$ choix possibles.

Il y a ainsi $\binom{n}{k} \times \binom{k}{i}$ équipes possibles.

Nous avons utilisé deux stratégies pour compter le nombre d'équipes à k élèves contenant i capitaines. Ainsi, nous obtenons la relation :

$$\forall (n, i, k) \in \mathbb{N}^3,\ i \leqslant k \leqslant n,\ \binom{n}{i}\binom{n-i}{k-i} = \binom{n}{k}\binom{k}{i}.$$

6 Fusion entre lycées : la formule de Vandermonde

La ville de Vandermonde compte deux lycées : le lycée Alexandre et le lycée Théophile. Le club du lycée Alexandre contient n élèves et celui du lycée Théophile en contient m. Ils décident d'unir leurs forces et d'envoyer une seule équipe constituée d'élèves des deux lycées. À noter que cette équipe peut être constituée uniquement d'élèves provenant du lycée Alexandre ou uniquement d'élèves provenant du lycée Théophile.

Pour préparer l'ensemble des messages, les chefs d'établissements ont deux possibilités :

Tout le monde dans le même panier. On considère les deux clubs comme un seul club contenant $n+m$ élèves. Il faut alors choisir une équipe de k élèves parmi ces $n+m$ élèves. Il y a $\binom{n+m}{k}$ choix possibles.

L'autonomie des lycées. Les proviseurs s'accordent sur un nombre i d'élèves tel que i élèves seront pris dans le lycée Alexandre et $k-i$ élèves seront pris dans le lycée Théophile.
- Il y a $\binom{n}{i}$ choix possibles pour sélectionner i élèves du lycée Alexandre.
- Il y a $\binom{m}{k-i}$ choix possibles pour sélectionner $k-i$ élèves du lycée Théophile.

Il y a alors $\binom{n}{i} \times \binom{m}{k-i}$ choix d'équipes possibles lorsque exactement i élèves proviennent du lycée Alexandre. Comme ce nombre i d'élèves peut varier entre 0 et k, le nombre total d'équipes est égal à $\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{m}{k-i}$.

Nous avons utilisé deux stratégies pour compter le nombre d'équipes à k élèves choisis parmi deux clubs contenant respectivement n et m élèves. Ainsi, nous obtenons la relation :

$$\binom{n+m}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{m}{k-i}.$$

Cette formule est appelée formule de Vandermonde [3].

On remarque que, dans cette formule, il est possible que de nombreux termes soient nuls. En effet, si i est plus grand que n, alors $\binom{n}{i} = 0$: on ne peut pas constituer d'équipe avec i élèves provenant du lycée Alexandre (dont le club n'en contient que n). De même, si $k - i \geqslant m$, alors $\binom{m}{k-i} = 0$. On peut donc réécrire cette formule sous la forme :

$$\binom{n+m}{k} = \sum_{i=\max\{0,m-k\}}^{\min\{k,n\}} \binom{n}{i}\binom{m}{k-i}.$$

Soit A de cardinal n et B de cardinal m deux ensembles disjoints. On pose $E = A \sqcup B$. L'application

$$\varphi \ : \ \begin{cases} \mathcal{P}_k(E) & \longrightarrow & \bigsqcup_{i=0}^{k} (\mathcal{P}_i(A) \times \mathcal{P}_{k-i}(B)) \\ X & \longmapsto & (X \cap A, X \cap B) \end{cases}$$

est une bijection.

- φ est surjective. Soit $(C, D) \in \bigsqcup_{i=0}^{k} (\mathcal{P}_i(A) \times \mathcal{P}_{k-i}(B))$. On pose $X = C \sqcup D$. Alors,

$$\begin{aligned} \varphi(X) &= (X \cap A, X \cap B) = ((C \cap A) \sqcup (D \cap A), (C \cap B) \sqcup (D \cap B)) \\ &= (C \sqcup \emptyset, \emptyset \sqcup D) = (C, D). \end{aligned}$$

- φ est injective. Supposons $\varphi(X_1) = \varphi(X_2)$. Alors

$$\begin{cases} X_1 \cap A &= X_2 \cap A \\ X_1 \cap B &= X_2 \cap B \end{cases}$$

3. Nommée en l'honneur du mathématicien français Alexandre-Théophile Vandermonde (1735-1796).

et

$$X_1 = X_1 \cap E = X_1 \cap (A \sqcup B) = (X_1 \cap A) \sqcup (X_1 \cap B) = X_2.$$

Remarquons qu'une autre démonstration classique consiste à développer les polynômes $(1+X)^{n+m}$, $(1+X)^n$ et $(1+X)^m$ à l'aide de la formule du binôme de Newton. On effectue ensuite le produit $(1+X)^n \times (1+X)^m$ en regroupant par puissance croissante, puis on identifie les coefficients dans l'égalité $(1+X)^{n+m} = (1+X)^n \times (1+X)^m$.

Exercice 4. *Montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{p=0}^{n} \sum_{q=0}^{n-p} \binom{n}{p} \binom{n}{q} \binom{n}{n-(p+q)} = \binom{3n}{n}.$$

7 En rangs d'oignons : la formule des Dalton

Supposons qu'il faille envoyer k élèves aux Olympiades, à choisir parmi les n élèves du club, et que les membres du club soient classés par taille [4]. Pour préparer l'ensemble des messages susceptibles d'être envoyés, le chef d'établissement a deux possibilités :

Définition. Revenir à la définition des coefficients binomiaux : il y a $\binom{n}{k}$ messages distincts possibles.

Ordonner les élèves. Commencer par choisir le rang $i+1$ de l'élève le plus grand qui sera envoyé. Il reste alors à choisir $k-1$ élèves parmi les i élèves qui ont une taille inférieure. Il y a alors $\binom{i}{k-1}$ messages possibles. Comme i varie entre $k-1$ et $n-1$, le nombre de messages est alors égal à : $\sum\limits_{i=k-1}^{n-1} \binom{i}{k-1}$.

Nous avons utilisé deux stratégies pour compter le nombre d'équipes de k élèves qui pourront partir aux Olympiades. Ainsi, nous obtenons la relation :

$$\forall (k,n) \in \mathbb{N}^2,\ k \leqslant n,\ \sum_{i=k-1}^{n-1} \binom{i}{k-1} = \binom{n}{k}.$$

4. Le cas $k = 0$ ayant déjà été traité précédemment, on supposera ici que $k \geqslant 1$. On supposera également qu'il n'y a pas deux élèves qui ont la même taille !

Soit n un entier $n \geqslant 2$ et $0 \leqslant k \leqslant n$. Il existe une bijection entre $\mathcal{P}_{k+1}(\llbracket 0, n \rrbracket)$ et $\bigsqcup_{i=k}^{n} (\mathcal{P}_k(\llbracket 0, i-1 \rrbracket) \times \{i\})$.
Soit φ l'application définie sur $\mathcal{P}_{k+1}(\llbracket 0, n \rrbracket)$ par

$$\varphi(A) = (A \setminus \{\max A\}) \times \{\max A\}.$$

Soit $A \subset \llbracket 0, n \rrbracket$ de cardinal $k+1$. Soit $i_0 = \max A$. Alors $i_0 \geqslant k$. Alors $A \setminus \{i_0\} \subset \llbracket 0, i_0 - 1 \rrbracket$ et est de cardinal k. Donc

$$\varphi(A) \in \bigsqcup_{i=k}^{n} (\mathcal{P}_k(\llbracket 0, i-1 \rrbracket) \times \{i\}) .$$

Cette application est

- injective : Soit A_1, A_2 sont deux éléments de $\mathcal{P}_{k+1}(\llbracket 0, n \rrbracket)$ tels que $\varphi(A_1) = \varphi(A_2)$. Alors, $\max A_1 = \max A_2 = i$ et $A_1 \setminus \{i\} = A_2 \setminus \{i\}$. Ainsi, $A_1 = (A_1 \setminus \{i\}) \sqcup \{i\} = A_2$.
- surjective : soit $B \in \bigsqcup_{i=k}^{n} (\mathcal{P}_k(\llbracket 0, i-1 \rrbracket) \times \{i\})$. Il existe $i_0 \geqslant p$ et $A_0 \in \mathcal{P}_k(\llbracket 0, i_0 - 1 \rrbracket)$ tels que $B = A_0 \times \{i_0\}$. Posons $A = A_0 \cup \{i_0\} \subset \llbracket 0, n \rrbracket$. Alors $A \in \mathcal{P}_{k+1}(\llbracket 0, n \rrbracket)$ et $\varphi(A) = B$.

Ł'union étant formée d'éléments deux à deux disjoints, on en déduit que

$$\forall\, k \in \llbracket 0, n \rrbracket,\ \binom{n+1}{k+1} = \sum_{i=k}^{n} \binom{i}{p}.$$

8 Durant les Olympiades : dénombrement de fonctions croissantes...

8.1 Les dortoirs

Cette année, n élèves sont présents aux Olympiades, concours qui se déroule sur plusieurs journées. Ces élèves sont à répartir dans p dortoirs qui contiennent chacun n lits. Les dortoirs sont disposés sur le même côté d'un couloir et numérotés de 1 à p. On note n_i le nombre d'élèves dormant dans le dortoir numéro i. Combien y a-t-il d'occupations $(n_1, \ldots, n_p)$ possibles des dortoirs ?

Comme, du point de la question posée, tous les élèves sont identiques, on peut représenter les élèves par un rond $\circ$. On peut également représenter les murs séparant les dortoirs par des barres verticales $|$. Ainsi, l'occupation :

3 élèves dans le dortoir 1,
2 élèves dans le dortoir 2,
0 élève dans le dortoir 3,
5 élèves dans le dortoir 4,

peut être représentée par la succession :

$$\circ\circ\circ|\circ\circ||\circ\circ\circ\circ\circ$$

On remarquera qu'on n'a pas représenté les premier et dernier murs des dortoirs, car ils sont inutiles pour représenter nos données.

À noter qu'il y a n symboles $\circ$ (autant que d'élèves) et $p-1$ symboles $|$ (autant que de murs séparateurs). Une occupation des dortoirs par les élèves est alors une succession de $n+p-1$ symboles où n sont des $\circ$ et $p-1$ sont des $|$. Pour choisir une occupation des dortoirs, il suffit de choisir la disposition des n symboles $\circ$ parmi la succession des $n-p+1$ symboles. On obtient ainsi :

> Le nombre de dispositions possibles pour répartir les n élèves dans les p dortoirs est égale à $\binom{n+p-1}{n}$.

Remarquons que cette modélisation permet également de dénombrer le nombre de fonctions croissantes de $[\![1,p-1]\!]$ dans $[\![0,n]\!]$. En effet, étant donnée une succession de symboles, la fonction qui à i associe le nombre de symboles $\circ$ avant le i^{e} symbole $|$ est une fonction croissante :

$$\circ\circ\circ|\circ\circ||\circ\circ\circ\circ\circ \quad \leftrightsquigarrow f \; : \left\{\begin{array}{ccc} [\![1,3]\!] & \longrightarrow & [\![0,10]\!] \\ 1 & \longmapsto & 3 \\ 2 & \longmapsto & 5 \\ 3 & \longmapsto & 5 \end{array}\right.$$

Réciproquement, étant donné une fonction croissante on peut aisément construire la suite de symboles. Ainsi,

> Le nombre de fonctions croissantes de $[\![1,p-1]\!]$ dans $[\![0,n]\!]$ est égal à
>
> $$\binom{n+p-1}{n}.$$

8.2 La photo de groupe

Lors du dernier jour de la cérémonie, une photo de groupe est prise. Seront présents n élèves et p organisateurs. Ils seront tous disposés sur une même ligne ; les élèves seront assis sur des chaises et les organisateurs seront debout. Pour des raisons esthétiques, deux professeurs ne peuvent pas être côte à côte et le rang doit commencer par un élève. Afin de préparer la photo, les techniciens préparent la disposition des chaises. Combien de dispositions différentes peuvent-ils élaborer ?

On constate que, en représentant une chaise par un symbole $\circ$ et une place debout par un symbole $|$, la préparation d'une photo correspond à une suite de

n symboles $\circ$ et p symboles $|$. Par exemple,

$$\circ\circ|\circ|\circ\circ|\circ\circ\circ$$

Comme au moins un symbole $\circ$ est présent entre deux symboles $|$, on peut de manière équivalente décrire une disposition en *supprimant* la description de la première chaise entre deux places debout (ainsi que celle qui débute le rang) :

$$\otimes\circ|\otimes|\otimes\circ|\otimes\circ\circ \quad \leftrightsquigarrow \circ||\circ|\circ\circ$$

Ainsi, une rangée est une succession de $n-p$ symboles $\circ$ et p symboles $|$. En reprenant le dénombrement de la partie précédente, le nombre de successions satisfaisant ces contraintes est égal à $\binom{p+n-p}{p}$. Ainsi,

> Il existe $\binom{n}{p}$ dispositions de chaises lorsque n élèves et p professeurs sont présents si le rang commence par un élève et que deux professeurs ne sont pas côte à côte.

En reprenant la correspondance précédente entre disposition et fonction, on remarque que nous venons de décompter les fonctions strictement croissantes de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$:

$$\circ\circ|\circ|\circ\circ|\circ\circ\circ \quad \leftrightsquigarrow f \;:\; \left\{\begin{array}{ccc} [\![1,3]\!] & \longrightarrow & [\![1,8]\!] \\ 1 & \longmapsto & 2 \\ 2 & \longmapsto & 3 \\ 3 & \longmapsto & 5 \end{array}\right.$$

Ainsi,

> Le nombre de fonctions strictement croissantes de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$ est égal à
> $$\binom{n}{p}.$$