LE MOUVEMENT BROWNIEN

ALAIN CAMANES

1828 : Brown : mouvement de graines de pollen dans de l'eau.
1900 : Bachelier : modèle de marché d'échange.
Idée : Processus de Markov gaussien à accroissements indépendants.

1. Définition et premières propriétés

Dans tout l'exposé, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ désigne un espace probabilisé.

1.1. **Définition.**

Définition 1.1. $B : \Omega \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est appelé mouvement brownien si et seulement si

(1) $B_0(\omega) = 0, \forall\, \omega \in \Omega$.
(2) $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $t_0 < \ldots < t_n$, $B_{t_0}, B_{t_1} - B_{t_0}, \ldots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ sont indépendants.
(3) $\forall\, s, t \geq 0$, $B_{t+s} - B_t \sim \mathcal{N}(0, t)$.
(4) $t \mapsto B_t$ est continue.

Remarques. ▶ L'existence d'un tel processus n'est pas évidente, voir la deuxième section.

▶ L'indépendance de deux variables aléatoires : pour toutes fonctions f, g mesurables bornées,
$$\mathbf{E}\left[f(X)g(Y)\right] = \mathbf{E}\left[f(X)\right]\mathbf{E}\left[g(Y)\right].$$
(les événements $\{X \in A\}$ et $\{Y \in B\}$ sont indépendants + classe monotone)

▶ La loi normale : pour tout borélien A,
$$\mathbf{P}\left(B_{t+s} - B_s \in A\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_A e^{-\frac{x^2}{2t}}\, dt.$$

▶ Comme $B_0 = 0$, $B_s \sim \mathcal{N}(0, s)$.

▶ Le critère de Kolmogorov présenté dans la suite permet de montrer que la continuité presque sûre découle des trois premières propriétés.

Proposition 1.1 (Changement d'échelle)**.** *Pour toute constante $c \geq 0$,*
$$(B_{ct},\, t \geq 0) \overset{\mathcal{L}}{=} \left(\sqrt{c} B_t,\, t \geq 0\right).$$

Idée de la démonstration. Deux variables aléatoires X, Y ont même loi si et seulement si pour toute fonction borélienne bornée,
$$\mathbf{E}\left[f(X)\right] = \mathbf{E}\left[f(Y)\right].$$
Un simple changement de variables assure que
$$\mathcal{N}(0, ct) \overset{\mathcal{L}}{=} \sqrt{c}\mathcal{N}(0, t).$$
□

Date: Notes révisées le 16 octobre 2008.

1.2. **Variations.**

Proposition 1.2 (Variation quadratique)**.** *Pour tous s, $t \geq 0$,*

$$Cov\,(B_s, B_t) = t \wedge s.$$

Démonstration. On suppose que $s \leq t$.

$$\begin{aligned} Cov\,(B_s, B_t) &= \mathbf{E}\,[B_s B_t] - \mathbf{E}\,[B_s]\,\mathbf{E}\,[B_t] \\ &= \mathbf{E}\,[B_s B_t] - 0 \\ &= \mathbf{E}\,[B_s(B_t - B_s)] + \mathbf{E}\left[B_s^2\right] \\ &= \mathbf{E}\,[B_s]\,\mathbf{E}\,[(B_t - B_s)] + \mathbf{E}\left[B_s^2\right] \\ &= 0 + s \\ &= s, \end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que la loi de B_s est centrée, l'indépendance des accroissements, puis le fait que la variance de B_s est s. □

On essaie d'en savoir plus sur la tête des fonctions $t \mapsto B_t(\omega)$.

Proposition 1.3 (Variation)**.** *Pour presque tout ω, $t \mapsto B_t(\omega)$ n'est pas à variation bornée.*

Démonstration. Soit $t \in \mathbb{R}_+$. Soit $\pi^n = (t_0, \ldots, t_n)$ une partition de $[0, t]$. La propriété précédente montre que

$$\mathbf{E}\left[\sum_{i=1}^{n-1} \left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right)^2\right] = t.$$

Un argument de martingale (cf. [Pro04] p. 18-19) permet de montrer qu'en fait

$$\sum_{i=1}^{n-1} \left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right)^2 \underset{pas(\pi^n)\to 0}{\longrightarrow} t \qquad \mathbf{P} - p.s.$$

On remarque alors, en notant V la variation du mouvement brownien sur $[0, t]$ que

$$\begin{aligned} t &= \lim_n \sum_k \left(B_{t_{k+1}} - B_{t_k}\right)^2 \\ &\leq \lim_n \sup_k \left|B_{t_{k+1}} - B_{t_k}\right| \sum_k \left|B_{t_{k+1}} - B_{t_k}\right| \\ &\leq 0 \times V. \end{aligned}$$

Ainsi, si $V < +\infty$, on obtient une contradiction. □

Une intégration naïve par rapport au mouvement brownien ne marche donc pas, à cause du théorème suivant, application du théorème de Banach-Steinhaus. On note

$$S_n = \sum_{t_k \in \pi^n} h(t_k)\left(x_{t_{k+1}} - x_{t_k}\right).$$

Théorème 1.4. *Si (S_n) converge pour toute fonction continue h, alors x est à variation bornée.*

Démonstration. Soit $T_n(h) = S_n$.

- Si $h(t_k) = sign\left(x_{t_{k+1}} - x_{t_k}\right)$, $T_n(h) = \sum_k |x_{t_{k+1}} - x_{t_k}|$. En approchant la fonction h ainsi définie par une fonction continue, on montre sans difficulté que $\|T_n\| \geq \sum_k |x_{t_{k+1}} - x_{t_k}|$, soit
$$\sup_n \|T_n\| \geq Variation(x).$$

- Si pour toute fonction h continue, $\lim_n T_n(h)$ existe,

$$\sup_n \|T_n(h)\| < +\infty,$$

donc d'après le théorème de Banach-Steinhaus appliqué à (T_n) définie sur l'espace des fonctions continues,

$$\sup_n \|T_n\| < +\infty.$$

Ainsi, on a montré que x est à variation finie. □

Il faudra donc travailler un peu plus pour définir l'intégrale stochastique...

1.3. **Régularité.**

Définition 1.2 (Modification)**.** Un processus $X = (X_t)$ est une modification d'un processus $\widetilde{X} = (\widetilde{X}_t)$ si et seulement si

$$\forall\, t \in \mathbb{R}_+,\, \mathbf{P}\left(X_t = \widetilde{X}_t\right) = 1.$$

Proposition 1.5 (Hölder)**.** *Soit (B_t) un mouvement brownien. Le processus B a une modification dont les trajectoires sont localement höldériennes d'exposant $\frac{1}{2} - \delta$, pour tout $\delta \in (0, \frac{1}{2})$.*

Remarque. On peut également montrer que $t \mapsto B_t$ est presque sûrement nulle part différentiable.

La régularité des trajectoires est une conséquence du critère très utile suivant. On se doute que, comme les accroissements du mouvement brownien sont des gaussiennes, on peut vérifier l'hypothèse de ce théorème sans grande difficulté.

Théorème 1.6 (Critère de Kolmogorov)**.** *Soit X un processus à valeurs réelles. S'il existe des constantes α, β, $C > 0$ telles que*

$$\mathbf{E}\left[|X_s - X_t|^\alpha\right] \leq C|t-s|^{1+\beta},\ \forall\, s,\, t \in [0,T],$$

alors il existe une modification $\widetilde{X}$ de X telle que pour tout $\gamma \in (0, \frac{\beta}{\alpha})$, il existe une constante δ et une variable aléatoire positive h telles que

$$\mathbf{P}\left(\sup_{0\leq s,t\leq T,\, 0<t-s<h(\omega)} \frac{\left|\widetilde{X}_s - \widetilde{X}_t\right|}{|t-s|^\gamma} \leq \delta\right) = 1.$$

Idée de la démonstration. (cf. [KS91] p. 55)

- D'après l'inégalité de Chebychev,

$$\mathbf{P}\left(|X_t - X_s| \geq \epsilon\right) \leq C\epsilon^{-\alpha}|t-s|^{1+\beta}.$$

- En utilisant le lemme de Borel-Cantelli, on montre que pour presque tout ω,

$$\max_{1\leq k\leq 2^n} |X_{\frac{k}{2^n}}(\omega) - X_{\frac{k-1}{2^n}}(\omega)| < 2^{-\gamma n},\ \forall\, n \geq n^\star(\omega).$$

- On passe des dyadiques à tous les réels en utilisant de l'uniforme continuité.
- Comme la construction précédente est valable sur presque tout ω, on définit une variable $\widetilde{X}$ qui vaut X sur cet ensemble et qui est nulle ailleurs.

□

2. Le principe d'invariance de Donsker

2.1. Le principe. Les (ξ_i) sont définies sur un espace de probabilité $(\mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathbf{P})$.

Soit $(\xi_i)_i$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi possédant des moments d'ordre 2. On suppose que $\mathbf{E}[\xi] = 0$, $\mathbf{E}[\xi^2] = 1$.
On définit la marche aléatoire

$$S_0 = 0,\ S_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i.$$

On définit la fonction linéaire par morceaux correspondant à cette marche aléatoire,

$$S_t = \begin{cases} S_k, \text{ si } t = k \in \mathbb{N} \\ \text{linéaire sur } [k, k+1]. \end{cases}$$

On remarque que nous pouvons écrire, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_t = S_{\lfloor t \rfloor} + (t - \lfloor t \rfloor)\xi_{\lfloor t \rfloor + 1}.$$

Théorème 2.1 (Donsker)**.**

$$\frac{S_{n\cdot}}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} B_{\cdot}.$$

Remarque. $\frac{1}{\sqrt{n}} S_{n\cdot} \ :\ \mathcal{E} \to \mathcal{C}$, l'ensemble des chemins continus.

2.2. La convergence en loi. On considère l'espace des chemins

$$\mathcal{C} = \left\{ (\omega_t)_{t \in \mathbb{R}_+},\ \omega \ :\ [0, +\infty) \to \mathbb{R}\, \textit{continues} \right\},$$

muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact, i.e. de la métrique

$$d(\omega_1, \omega_2) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{2^n} \left\{ 1 \wedge \max_{0 \leq t \leq n} |\omega_1(t) - \omega_2(t)| \right\}.$$

On notera $X = (X_t)_{t \in \mathbb{N}}$. On remarque que $X \ :\ \mathcal{E} \to \mathcal{C}$.

Définition 2.1. Soit $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$, X des processus. On dit que X^n converge en loi vers X, noté $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$, si et seulement si pour toute fonction $f \ :\ \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ continue bornée,

$$\mathbf{E}\left[f(X^n) \right] \to \mathbf{E}\left[f(X) \right].$$

Remarque. De manière équivalente, à toute variable aléatoire, on peut associer sa mesure image : pour tout borélien A de $\mathcal{C}$,

$$\mathbf{P}_n\left(A \right) = \mathbf{P}\left(\{ \epsilon \in \mathcal{E};\ S_n(\epsilon) \in A \} \right).$$

On dit alors que $(\mathbf{P}_n)$ converge en loi vers $\mathbf{W}$ si et seulement si pour toute fonction $f \ :\ \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ continue bornée,

$$\mathbf{P}_n(f) = \int_{\omega} f(\omega)\, d\mathbf{P}_n(\omega) \to \mathbf{W}(f) = \int_{\omega} f(\omega) d\mathbf{W}(\omega).$$

En analyse, on parle de convergence étroite.

Application : La fonction $\psi(\omega) = \max_{0 \leq t \leq 1} \omega(t)$ est continue. Ainsi,

$$\max_{0 \leq m \leq n} \frac{S_m}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \max_{0 \leq t \leq 1} B_t,$$

soit en utilisant la définition de la convergence en loi, pour toute fonction $f \ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue bornée,

$$\mathbf{E}\left[f\left(\max_{0 \leq m \leq n} \frac{S_m}{\sqrt{n}} \right) \right] \to \mathbf{E}\left[f\left(\max_{0 \leq t \leq 1} B_t \right) \right].$$

2.3. **Les lois fini-dimensionnelles.**

Définition 2.2. On dit que X^n converge vers X au sens des lois fini-dimensionnelles, noté $X^n \overset{f.d.}{\to} X$, si et seulement si pour tous $d \in \mathbb{N}$, $t_1 \leq \ldots \leq t_d$,

$$\left(X^n_{t_1}, \ldots, X^n_{t_d}\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \left(X_{t_1}, \ldots, X_{t_d}\right).$$

Remarque. Pour tout vecteur $(t_1, \ldots, t_d)$ on considère la projection

$$\begin{array}{rccc} \pi_{t_1,\ldots,t_d} & : & \mathcal{C} & \to \mathbb{R}^d \\ & & \omega & \mapsto \quad (\omega(t_1), \ldots, \omega(t_d)). \end{array}$$

Cette fonction est bien continue. La convergence fini-dimensionnelle s'écrit alors, pour tout vecteur $(t_1, \ldots, t_d)$,

$$P_n \circ \pi^{-1}_{t_1,\ldots,t_d} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathbf{W} \circ \pi^{-1}_{t_1,\ldots,t_d}.$$

On rappelle que pour des variables aléatoires, (X_n, Y_n) converge en loi vers (X, Y) si et seulement si les fonctions caractéristiques convergent, i.e. pour tous u, $v \in \mathbb{R}$,

$$\mathbf{E}\left[e^{iuX_n + ivY_n}\right] \to \mathbf{E}\left[e^{iuX+ivY}\right].$$

Le mouvement brownien : On constate qu'il suffit de montrer que

$$\left(\frac{1}{\sqrt{n}} S_{nt_1}, \frac{1}{\sqrt{n}} S_{nt_2}\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \left(B_{t_1}, B_{t_2}\right).$$

Or,

$$\frac{1}{\sqrt{n}} S_{nt_1} = \frac{1}{\sqrt{n}} S_{\lfloor nt_1 \rfloor} + \underbrace{\frac{nt_1 - \lfloor nt_1 \rfloor}{\sqrt{n}} \xi_{\lfloor nt_1 \rfloor + 1}}_{\zeta_n}.$$

On remarque que $\mathbf{E}[\zeta_n^2] \to 0$ (la convergence L^2 implique la convergence en loi) et d'après le théorème central limite,

$$\frac{1}{\sqrt{n}} S_{\lfloor nt_1 \rfloor} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, t_1) \sim B_{t_1}.$$

Pour rédiger correctement ce raisonnement, passer par les fonctions caractéristiques...

Vérifier la convergence des loi fini-dimensionnelles n'est donc pas très compliqué. Cependant, la convergence des loi fini-dimensionnelles n'implique pas la convergence en loi (tout comme la convergence presque sûre n'implique pas la convergence uniforme sur tout compact). Pour le voir, on peut considérer le contre-exemple suivant :

$$x^n_t = nt \mathbb{1}_{\left[0, \frac{1}{2n}\right]}(t) + (1 - nt) \mathbb{1}_{\left[\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}\right]}(t).$$

En posant $\mathbf{P}_n = \delta_{x^n}$, où δ désigne la mesure de dirac, nous avons de manière évidente, $\mathbf{P}_n \xrightarrow{f.d.} 0$. Cependant, $(\mathbf{P}_n)$ ne converge pas en loi vers 0. En effet, en considérant par exemple la fonction continue bornée $\psi(\omega) = \max_{0 \leq t \leq 1} |\omega(t)| \wedge 1$, on a

$$1 = \mathbf{P}_n(\psi) \not\to 0.$$

Pour obtenir de la convergence en loi à partir de la convergence des loi fini-dimensionnelles, il faut en plus une hypothèse de compacité, ce qui se traduit en probabilités par de la *tension.*

2.4. **La tension ou la compacité.** On rappelle qu'une suite (S^n) est dite relativement compacte si de toute sous-suite on peut extraire une sous-suite convergente, i.e. pour toute sous-suite $(S^{\widetilde{n}})$, il existe $(\widetilde{n}_k)$ et un processus S tels que pour toute fonction continue bornée f,

$$\mathbf{E}\left[f\left(S^{\widetilde{n}_k}\right)\right] \longrightarrow \mathbf{E}\left[f\left(S\right)\right].$$

Remarque. De manière analogue, on dira qu'une famille de probabilités $(\mathbf{P}_n)$ est relativement compacte, si de toute sous-suite on peut extraire une sous suite étroitement convergente.

Théorème 2.2. *Pour des processus* (S^n), S,

$$S^n \xrightarrow{\mathcal{L}} S \Leftrightarrow \begin{cases} S^n \xrightarrow{f.d.} S \\ (S^n) \text{ est relativement compacte.} \end{cases}$$

Démonstration rapide. ($\Rightarrow$) Les projections sont continues.

($\Leftarrow$) Comme il y a convergence des lois fini-dimensionnelles, il existe un unique processus S vers lequel convergent toutes les sous-suites convergentes. On raisonne par l'absurde, s'il existe une fonction continue bornée f telle que pour tout ϵ, il existe une suite (n_k),

$$\left|\mathbf{E}\left[f(S^{n_k})\right] - \mathbf{E}\left[f(S)\right]\right| \geq \epsilon.$$

On obtient alors une contradiction avec la relative compacité de la suite.

□

Remarque. Dans les lignes qui suivent, la stratégie est la suivante : pour montrer la relative compacité, on va utiliser la notion de tension. Pour montrer de la tension, il faut trouver un compact de l'ensemble des chemins. Pour identifier ce compact, on utilise le théorème d'Ascoli.

Comment montrer la relative compacité ? On rappelle le théorème bien connu suivant.

Théorème 2.3 (Ascoli)**.** *Soit* $A \subset \mathcal{C}([0,\infty),\mathbb{R})$.

$$\left.\begin{array}{l} \sup_{\omega\in A} |\omega(0)| < +\infty \\ \lim_{\delta\to 0}\sup_{\omega\in A} m^T(\omega,\delta) = 0,\ \forall T > 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow A \text{ est relativement compacte,}$$

où $m^T(\omega,\delta) = \sup_{0\leq x,y\leq T,\ |x-y|\leq\delta} |\omega(x)-\omega(y)|$ *désigne le module de continuité de* ω.

Comment transporter cette propriété sur l'espace des processus continus ? La notion suivante est très importante en probabilités.

Définition 2.3 (Tension)**.** Une suite de variables aléatoires (S^n) est tendue si, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un compact K de $\mathcal{C}$ tel que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{P}\left(S^n \notin K\right) \leq \epsilon.$$

Remarque. Une suite de probabilités $(\mathbf{P}_n)$ définie sur l'ensemble des chemins $\mathcal{C}$ est dite tendue si pour tout $\epsilon \geq 0$, il existe un compact K de $\mathcal{C}$ tel que

$$\sup_n \mathbf{P}_n(K^c) \leq \epsilon.$$

Le lien entre compacité et tension est donné dans le théorème suivant (cf. [KS91] p. 62)

Théorème 2.4 (Prohorov)**.** *Soit* (S^n) *une suite de variables aléatoires à valeurs dans un espace polonais (métrique, séparable, complet)* $\mathcal{C}$. *Alors,*

$$(S^n) \text{ est relativement compacte } \Leftrightarrow (S^n) \text{ est tendue.}$$

Ici, l'espace polonais sera l'espace $\mathcal{C}$ des chemins, dont les parties relativement compactes sont décrites par le théorème d'Ascoli. On déduit de ces considérations le théorème suivant.

Théorème 2.5. *On a équivalence entre la tension de* (S^n) *et*

$$\begin{cases} \lim_{\lambda\to\infty} \sup_n \mathbf{P}\left(|S^n(0)| \geq \lambda\right) &= 0 \\ \lim_{\delta\to 0} \sup_n \mathbf{P}\left(m^T(S^n,\delta) \geq \epsilon\right) &= 0 \end{cases}$$

Démonstration rapide. Pour alléger la preuve, on note $\mathbf{P}_n(A) = \mathbf{P}(S^n \in A)$.

($\Rightarrow$) Pour tout $\eta \geq 0$, il existe un compact K tel que

$$P_n(K) = P_n\left(\{\omega,\, \omega \in K\}\right) \geq 1-\eta.$$

Comme K est compact, d'après le théorème d'Ascoli, il existe $\lambda \geq 0$ tel que pour tout $\omega \in K$, $|\omega(0)| \leq \lambda$, soit

$$\sup_n \mathbf{P}_n\left(|\omega(0)| > \lambda\right) \leq \sup_n \mathbf{P}_n(K^c) \leq \eta.$$

De même, d'après le théorème d'Ascoli, pour tous T, $\epsilon \geq 0$, il existe δ_0 telle que pour tout $\omega \in K$, $0 \leq \delta \leq \delta_0$, $m^T(\omega,\delta) \leq \epsilon$, soit

$$\sup_n \mathbf{P}_n\left(m^T(\omega,\delta) > \epsilon\right) \leq \mathbf{P}_n(K^c) \leq \eta.$$

($\Leftarrow$) Soient T, $\eta > 0$. Par hyothèse,

$$\begin{aligned} \exists\lambda > 0\, t.q. \quad & \sup_n \mathbf{P}_n\left\{|\omega(0)| > \lambda\right\} \leq \frac{\eta}{2^{T+1}}, \\ \exists\delta_k > 0\, t.q. \quad & \sup_n \mathbf{P}_n\left\{m^T(\omega,\delta_k) > \frac{1}{k}\right\} \leq \frac{\eta}{2^{T+k+1}}. \end{aligned}$$

On note

$$A_T = \left\{|\omega(0)| \leq \lambda,\, m^T(\omega,\delta_k) \leq \tfrac{1}{k},\, k = 1,2,\ldots\right\}.$$

On montre en utilisant le théorème d'Ascoli que $A = \bigcap_T A_T$ est relativement compact, puis que

$$\mathbf{P}_n(A_T) \geq 1 - \sum_k \frac{\eta}{2^{T+k+1}} = 1 - \frac{\eta}{2^T},$$

soit $\mathbf{P}_n(A) \geq 1-\eta$, pour tout $n \geq 1$ et la suite $(\mathbf{P}_n)$ est tendue (choisir $K = \overline{A}$).

□

Le mouvement brownien : On remarque que la première propriété est triviale car $S_0 = 0$. Il suffit donc de montrer que

$$\mathbf{P}\left(\sup_{|s-t|\leq\delta,\, 0\leq s,t\leq T} \tfrac{1}{\sqrt{n}}\left|S_{ns} - S_{nt}\right| > \epsilon\right) \underset{\delta\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Quelques opérations élémentaires montrent que cet événement peut se réécrire sous la forme

$$\max_{1\leq j\leq \lfloor n\delta\rfloor+1,\, 0\leq k\leq\lfloor nT\rfloor+1} \left|S_{j+k} - S_k\right| > \epsilon\sqrt{n}.$$

Et ceci est possible (cf. [KS91] p. 69-71)...
En l'absence du max, on peut montrer que la propriété est vraie en utilisant une inégalité du type Chebychev. Pour rajouter le max, il faut utiliser ce qui est appelé en probabilités une inégalité maximale.

3. Une application : le maximum des marches aléatoires

Dans cette partie (cf. [Bil68] p. 70-72), nous allons utiliser le théorème de Donsker pour trouver la distribution limite de $\max_{i\leq n} S_i$.
L'idée est la suivante : Lorsque les sauts valent ± 1 avec même probabilité, on sait évaluer le maximum de la marche aléatoire. En utilisant le principe de Donsker, on en déduit la loi du maximum d'un mouvement brownien. Enfin, en utilisant une nouvelle fois le principe de Donsker, on en déduit la loi du maximum de toute marche aléatoire de sauts de carré intégrable.

- Comme $\max_{[0,1]} : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, le théorème de Donsker assure que
$$\max_{0\leq t\leq 1} \frac{S_{nt}}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \max_{0\leq t\leq 1} B_t.$$
Or, comme $S_{n\cdot}$ est une ligne brisée, le max est obtenu en un des points de brisure, i.e.
$$\max_{0\leq t\leq 1} \frac{S_{nt}}{\sqrt{n}} = \max_{i\leq n} S_i.$$
- Considérons une marche aléatoire équilibrée, i.e. $\mathbf{P}(\xi = 1) = 1 - \mathbf{P}(\xi = -1) = \frac{1}{2}$. On peut montrer que pour tout entier positif a,
$$\mathbf{P}\left(\max_{i\leq n} S_i \geq a\right) = 2\mathbf{P}(S_n > a) + \mathbf{P}(S_n = a).$$
En effet, en posant $M_n = \max_{i\leq n} S_i$, on a
$$\begin{aligned}\mathbf{P}(M_n \geq a) - \mathbf{P}(S_n = a) &= \mathbf{P}(M_n \geq a,\, S_n < a) + \mathbf{P}(M_n \geq a,\, S_n > a)\\ &= \mathbf{P}(M_n \geq a,\, S_n < a) + \mathbf{P}(S_n > a)\end{aligned}$$
Il suffit donc de montrer que
$$\mathbf{P}(M_n \geq a,\, S_n < a) = \mathbf{P}(S_n > a).$$
Il suffit de trouver une bijection entre ces chemins, c'est possible en considérant le chemin définit, à partir du point où a est atteint, par la réflexion du chemin initial par rapport à la droite horizontale d'ordonnée a (faire un dessin...)
Ainsi, pour tout entier positif x, en posant $x_n = -\lfloor -x\sqrt{n}\rfloor$, on a
$$\mathbf{P}\left(\max_{i\leq n} \frac{1}{\sqrt{n}} S_i \geq x_n\right) = 2\mathbf{P}(S_n > x_n) + \mathbf{P}(S_n = x_n).$$
En utilisant le théorème central limite, pour une variable aléatoire gaussienne N,
$$\mathbf{P}(S_n > x_n) \to \mathbf{P}(N \geq x).$$
Ainsi, on obtient
$$\mathbf{P}\left(\sup_{t\in[0,1]} B_t \leq x\right) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{u^2}{2}}\, du.$$
- Maintenant, si on considère une marche aléatoire $\widetilde{S}$ à accroissements indépendants de carré intégrables (centrés réduits), on obtient en utilisant le théorème de Donsker, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,
$$\mathbf{P}\left(\max_{i\leq n} \frac{\widetilde{S}_i}{\sqrt{n}} \leq x\right) \to \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{u^2}{2}}\, du.$$

Références

[Bil68] Patrick Billingsley : *Convergence of probability measures*. John Wiley & Sons Inc., New York, 1968.

[KS91] Ioannis Karatzas et Steven E. Shreve : *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. Springer, second édition, 1991.

[Pro04] Philip E. Protter : *Stochastic Integration and Differential Equations*. Springer, 2004.

Laboratoire Jean Leray UMR 6629
Université de Nantes
2, Rue de la Houssinière BP 92208
F-44322 Nantes Cedex 03
E-mail address: `camanes-a@univ-nantes.fr`