Le mouvement brownien

Alain Camanes

06 novembre 2006

Un peu d'histoire

A l'été 1827, Robert Brown (1773-1858) éminent botaniste britannique observe les grains de pollen de la Clarkia pulchella. Il aperçoit dans le fluide situé à l'intérieur des grains de pollen des petites particules agitées de mouvements apparemment chaotiques. Ces mouvements avaient auparavant été observés, notamment par l'abbé John Thuberville Needham (1713-1781), mais étaient attribués à une activité vitale. Brown a surtout apporté dans le domaine de la botanique. Il est le premier à avoir classé les plantes selon leur nature angiosperme (ovule protégé par un ovaire) ou gymnosperme (ovule non protégé).
La suite de l'histoire : au XX^{eme} siècle, Langevin et Einstein (1905) donnent une description quantitative du mouvement brownien. Dans son article de 1905, il montre que l'observation de ce phénomène permet de calculer le nombre d'Avogadro. J. Perrin (Prix Nobel 1926 pour ses travaux) effectue les observations alors que Langevin développe la théorie.
En 1920, N. Wiener donne une définition mathématique du mouvement brownien. Il étudie en particulier ses trajectoires qui sont continues mais nulle part différentiables (à aucun moment la vitesse ne peut être définie car les changements de direction sont trop rapides).
K. Itô dans les années 40 développe un calcul différentiel spécifique au mouvement brownien : le calcul stochastique.
La plupart de ces informations sont issues de l'article [Sch06]

1 Définition

1.1 Rappels de théorie de la mesure

Dans toute la suite, on considère un espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.
Nous définissons ici les principaux objets qui apparaîtrons par la suite. Pour plus de rigueur et de précision sur ces définitions, se référer à l'ouvrage [RY05].

Définition 1.1. Une *filtration* $(\mathcal{F}_t)_t$ est une suite de tribus croissantes pour l'inclusion, i.e. pour tous $s, t,\ s \leq t$,

$$\mathcal{F}_s \prec \mathcal{F}_t.$$

Définition 1.2. Un *processus stochastique* $(F_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est une suite de variables aléatoires indexée par t.

Pour la construction de l'espérance conditionnelle et l'utilisation des martingales en temps discret, voir l'ouvrage [Wil91]

Définition 1.3. Un processus F_t est une $\mathcal{F}_t$-martingale si pour tous $s \leq t$,

$$\mathbb{E}[F_t|\mathcal{F}_s] = F_s.$$

(on suppose également que F_t est intégrable).

1.2 Définition

Définition 1.4. On dit qu'un processus $(B_t, t \in \mathbb{R}_+)$ est un *mouvement brownien* réel si

- (i). $B_0(\omega) = 0,\ \forall \omega \in \Omega$,
- (ii). $t \mapsto B_t(\omega)$ est continue, $\forall \omega \in \Omega$,
- (iii). $\forall\ t, h \geq 0$, $\mathcal{N}(0,h) \sim B_{t+h} - B_t \perp\!\!\!\perp \{B_u, u \leq t\}$.

La première question que l'on se pose sûrement est pourquoi étudier le mouvement brownien ? ?

Remarque. (i). Sa définition permet d'effectuer les calculs

- (ii). Le mouvement brownien est à la fois une martingale, une chaîne de Markov, etc. . .
- (iii). On pourra utiliser le mouvement brownien comme brique élémentaire pour construire des processus plus élaborés.

2 Premières propriétés

2.1 Encore plus de mouvements browniens

Théorème 2.1. *Etant donné $(B_t)_t$ un mouvement brownien, les processus suivant sont également des mouvements browniens :*

- (i). $(-B_t)_{t \geq 0}$
- (ii). $(B_{t+a} - B_a)_{t \geq 0},\ \forall\ a \in \mathbb{R}$
- (iii). $(cB_{t/c^2})_{t \geq 0},\ \forall\ c \neq 0$ *(propriété de scaling)*
- (iv). *Le processus $\tilde{B}$ définit par :*

$$\begin{cases} \tilde{B}_0 & = & 0 \\ \tilde{B}_t & = & tB_{1/t} \end{cases}$$

Remarque. La propriété de continuité des trajectoires est une propriété p.s.

Démonstration. On vérifie tour à tour les critères imposés par la définition :

- (i). $B_0 = 0$ dans tous les cas.
- (ii). la continuité est évidente sauf dans le dernier des cas. Considérons l'ensemble :

$$\tilde{F} = \{\tilde{B}_t \to 0\} = \cap_n \cup_m \cap_{q \in \mathbb{Q} \cap [0,m]} \left\{ |\tilde{B}_q| \leq \frac{1}{n} \right\}.$$

Les processus $(\tilde{B}_t)_t$ et $(B_t)_t$ étant continus et ayant même distribution,

$$\mathbb{P}(F) = \mathbb{P}(\tilde{F}) = 1.$$

Le dernier $\cap$ montre que $\tilde{B}_q$ est majoré apcr, ensuite qu'il existe m assez petit pour que ce soit vrai et finalement que $\tilde{B}_q$ est petit.

(iii). pour ce qui est de la distribution des accroissements :

$$c(B_{(t+h)/c^2} - B_{t/c^2}) \sim c\mathcal{N}(0, \frac{h}{c^2}) = \mathcal{N}(0, h)$$

puis,

$$\begin{array}{rcl} (t+h)B_{1/(t+h)} - tB_{1/t} & = & -t(B_{1/t} - B_{1/(t+h)}) + hB_{1/(t+h)} \\ & \overset{\perp\!\!\!\perp}{\sim} & t\,\mathcal{N}(0, \frac{1}{t} - \frac{1}{t+h}) + h\,\mathcal{N}(0, \frac{1}{t+h}) \\ & \sim & \mathcal{N}(0, \frac{th}{t+h}) + \mathcal{N}(0, \frac{h^2}{t+h}) \\ & \overset{\perp\!\!\!\perp}{\sim} & \mathcal{N}(0, h) \end{array}$$

□

Corollaire 2.2 (Récurrence)**.** *Nous avons*

$$\mathbb{P}\left(\sup_t B_t = +\infty, \quad \inf_t B_t = -\infty\right) = 1$$

Démonstration. Notons $Z = \sup_t B_t$. On utilise la propriété de scaling pour montrer que pour $c > 0$:

$$cZ \overset{\mathcal{L}}{=} Z$$

Ainsi, la loi de Z est concentrée sur $\{0, +\infty\}$.

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}(Z=0) & \leq & \mathbb{P}\left(B_1 \leq 0 \text{ et } B_u \leq 0 \text{ pour } u \geq 1\right) \\ & = & \mathbb{P}\left(B_1 \leq 0 \text{ et } \sup_{t\geq 0}\{\underbrace{B_{1+t} - B_1}_{\sup \cdot \in \{0,\ +\infty\}}\} = 0\right) \end{array}$$

On obtient ainsi par indépendance :

$$\mathbb{P}(Z=0) \leq \mathbb{P}(B_1 \leq 0)\mathbb{P}(Z=0) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(Z=0)$$

D'où la conclusion en utilisant le fait que $(-B_t)_t$ est un mouvement brownien.

□

2.2 Des martingales

Dans toute cette partie, nous noterons $\mathcal{B}_t = \sigma(B_s, s \leq t)$.

Théorème 2.3.

$(B_t, \mathcal{B}_t)$ est une martingale.

Démonstration. On veut montrer que pour $s \leq t$, on a $\mathbb{E}[B_t|\mathcal{B}_s] = B_s$. Soit $s \leq t$

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{E}[B_t - B_s|\mathcal{B}_s] & \overset{\perp\!\!\!\perp}{=} & \mathbb{E}[B_t - B_s] \\ & \overset{\mathcal{N}(0,t-s)}{=} & 0 \end{array}$$

□

Théorème 2.4. *Pour $s,\ t \in \mathbb{R}_+$,*

$$Cov(B_t, B_s) = t \wedge s$$

Démonstration. Soit $s \leq t$.

$$\begin{array}{rcl} Cov(B_s, B_t) & = & \mathbb{E}[B_s B_t] \\ & = & \mathbb{E}[B_s \mathbb{E}[B_t|\mathcal{B}_s]] \\ & = & \mathbb{E}[B_s^2] \\ & = & s, \end{array}$$

d'où le résultat annoncé. □

Remarque. On peut ainsi voir $(B_t)_t$ comme un processus gaussien centré de covariance $s \wedge t$.

Théorème 2.5 (Variation quadratique)**.**

$$(B_t^2 - t, \mathcal{B}_t) \text{ est une martingale.}$$

Démonstration. On utilise la définition du mouvement brownien,

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{E}\left[(B_t - B_s)^2|\mathcal{B}_s\right] & \overset{\perp\!\!\!\perp}{=} & \mathbb{E}\left[B_t^2|\mathcal{B}_s\right] - 2B_s\mathbb{E}\left[B_t|B_s\right] + B_s^2 \\ t - s & \overset{\text{mart.}}{=} & \mathbb{E}\left[B_t^2|\mathcal{B}_s\right] - B_s^2 \end{array}$$

ce qui prouve le théorème □

Théorème 2.6 (Martingale exponentielle)**.** *Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,*

$$\left(e^{\theta B_t - \frac{1}{2}\theta^2 t}\right) \text{ est une martingale.}$$

Démonstration. La preuve réside dans le calcul de fonction caractéristique suivant (cf. cours d'analyse complexe),

$$\mathbb{E}\left[e^{\theta(B_t - B_s)}\right] \overset{\mathcal{N}(0,t-s)}{=} e^{\frac{\theta^2}{2}(t-s)}$$

□

3 Une construction du mouvement brownien

L'idée, issue de la construction effectuée par Wiener, est de décomposer le mouvement brownien en séries de Fourier. On va décrire ici la construction d'un mouvement brownien sur $[0,1]$.
On utilise pour cela la famille suivante ($t \in [0,1]$) :

$$\begin{aligned} g_{1,0}(t) &= 1 \\ g_{k,n}(t) &= \begin{cases} 2^{(n-1)/2} & \text{si } \frac{k-1}{2^n} < t \leq \frac{k}{2^n} \\ -2^{(n-1)/2} & \text{si } \frac{k}{2^n} < t \leq \frac{k+1}{2^n} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

pour $n \geq 1$, k impair.
On notera ainsi pour simplifier l'ensemble des indices : $\begin{cases} S_n &= \{(k,n),\ k \text{ impair },\ k \leq 2^n\} \\ S &= \cup_n S_n \end{cases}$

Lemme 3.1. $(g_{k,n})_{(k,n)\in S}$ *est une base orthogonale de* $L^2[0,1]$.

Démonstration. On vérifie l'orthogonalité. Pour $n \leq n'$,

$$\begin{aligned} \int_0^1 g_{k,n}(t) g_{k',n'}(t)\ dt &= 2^n \left(\int_{(k-1)/2^n}^{k/2^n} g_{k',n'}(t)\ dt - \int_{k/2^n}^{(k+1)/2^n} g_{k',n'}(t)\ dt \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

car $g_{k',n'}$ est d'intégrale nulle.

Pour montrer la complétude, on considère une fonction $f \in L^2[0,1]$ avec $f \perp (g_{k,n})_{(k,n)\in S}$.
Notons $F(t) = \int_0^t f(u)\ du$.
– Par définition, $F(0) = 0$
– Comme $f \perp g_{1,0}$, $F(1) = 0$
– Comme $f \perp g_{1,1}$, $F(1/2) = \int_{1/2}^1 f = 0$ d'après le point précédent
– De même, $F(1/4) = F(3/4) = 0$
– ...
On a ainsi montré que $F = 0$ p.p. On a ainsi $f = 0$ p.p. (f est positive). □

Définition 3.1. Pour $(k,n) \in S$, $t \in [0,1]$ on note

$$f_{k,n}(t) = \int_0^t g_{k,n}(u)\ du$$

On considère également une famille $(Z_{k,n})_{(k,n)\in S}$ de v.a. i.i.d. de loi $\mathcal{N}(0,1)$. On définit alors

$$B_n(t) = \sum_{m=0}^{n} \sum_{(k,n)\in S_m} Z_{k,m} f_{k,m}(t).$$

Remarque. Les $f_{k,n}$ sont des toiles de tentes centrées en $k/2^n$, de hauteur $2^{-(n+1)/2}$.

Lemme 3.2. (B_n) *converge uniformément p.s. sur* $[0,1]$.

Démonstration. On va montrer que p.s. $(B_n)_n$ ne varie pas beacoup. Soit $(a_n)_n$ une suite dont nous fixerons la valeur ultérieurement.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\sup_{0\le t\le 1}|B_n(t)-B_{n-1}(t)|>a_n\right) &= \mathbb{P}\left(\sup_{0\le t\le 1}\left|\sum_k Z_{k,n}f_{k,n}(t)\right|>a_n\right)\\
&= \mathbb{P}\left(\sup_k |Z_{k,n}|>2^{(n+1)/2}a_n\right)\\
&\le 2^{n-1}\mathbb{P}\left(|Z_{1,n}|>2^{(n+1)/2}a_n\right)\\
&\le \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\frac{2^{n/2}}{a_n}e^{-a_n^2 2^n},
\end{aligned}$$

où on a utilisé l'inégalité obtenue par intégration par parties,

$$\int_x^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \le \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{x}.$$

On cherche alors à choisir la suite (a_n) de manière à obtenir :

– $\sum_n \frac{2^{n/2}}{a_n}e^{-a_n^2 2^n} < +\infty$ car, d'après le lemme de Borel-Cantelli, on aura alors

$$\sup_{0\le t\le 1}|B_n(t)-B_{n-1}(t)|\le a_n \ p.s.$$

– $\sum_n a_n < \infty$ car on aura alors

$$B_n(.) \text{ converge uniformément p.s.}$$

Il nous suffit ainsi de choisir :

$$a_n = \sqrt{\frac{n}{2^n}}$$

Lemme 3.3 (Borel-Cantelli)**.** *Soit* $(A_n)_n$ *une suite d'événements t.q.*

$$\sum \mathbb{P}(A_n) = +\infty.$$

Alors,

$$\mathbb{P}(A_n \textit{ infiniment souvent}) = 0,$$

et donc pour tout ω*, il existe* n_0 *t.q.* A_n *soit vrai pour* $n \ge n_0$*.*

Démonstration. Notons $A = \{A_n$ infiniment souvent. On remarque que, pour tout n,

$$A \subset \cup_{m=n}^{\infty} A_m,$$

et ainsi

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A) &\le \sum_{m=n}^{\infty}\mathbb{P}(A_m)\\
&\to 0,
\end{aligned}$$

d'après l'hypothèse. □

Notant B la limite des B_n, montrons que B est bien un mouvement brownien, i.e. un processus gaussien centré de covariance $\mathbb{E}[B_s B_t] = t \wedge s$. (la continuité du processus est une conséquence de la convergence uniforme et de la continuité des $(f_{k,n})$)
Pour $0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_k \leq t$,
$(B_n(t_1), \ldots, B_n(t_k))$ est un processus gaussien centré. Il en va donc de même de la limite. Regardons ce qui se passe pour la variance.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[B_n(s)B_n(t)] &= \sum_{m=0}^{n}\sum_{m'=0}^{n}\sum_{(k,m)\in S_m}\sum_{(k',m')\in S_{m'}} \mathbb{E}[Z_{k,m}Z_{k',m'}]f_{k,m}(s)f_{k',m'}(t) \\
&= \sum_{m=0}^{n}\sum_{(k,m)\in S_m} f_{k,m}(s)f_{k,m}(t) \\
\mathbb{E}[B_sB_t] &= \sum_{(k,m)\in S} f_{k,m}(s)f_{k,m}(t) \\
&\overset{\text{Parseval}}{=} \int_0^1 1_{[0,s]}(u)1_{[0,t]}(u)\,du \\
&= s \wedge t
\end{aligned}$$

□

Remarque. Si on veut définir un mouvement brownien sur $\mathbb{R}$, on met des mouvements browniens $(X_.^{(n)})_n$ définits sur $[0,1]$ bout à bout. On définit pour cela l'espace de probabilités :

$$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \ldots, \ \mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2 \otimes \ldots, \ \mathbb{P} = \mathbb{P}_1 \otimes \mathbb{P}_2 \otimes \ldots$$

sur lequel on considère le processus :

$$B_t = \begin{cases} X_t^{(1)} & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ B_n + X_{t-n}^{(n+1)} & \text{si } n \leq t \leq n+1 \end{cases}$$

L'idée intuitive de construire le mouvement brownien comme une marche aléatoire vue de très loin est plus longue à mettre en oeuvre. Il faut notamment parler de topologie et de convergence de mesures sur l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, ce qui prend un peu de temps...
Pour plus de propriétés sur le mouvement brownien se reporter à l'ouvrage [RW00].

Références

[RW00] L.C.G. Rogers and David Williams. *Diffusions, Markov processes and martingales. Vol. 1 : Foundations. 2nd ed.* Cambridge : Cambridge University Press., 2000.

[RY05] Daniel Revuz and Marc Yor. *Continuous martingales and Brownian motion. 3rd ed., 3rd. corrected printing.* Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 293. Berlin : Springer., 2005.

[Sch06] S. Schmitt. De brown au mouvement brownien. *Pour la Science*, janvier 2006.

[Wil91] David Williams. *Probability with martingales.* Cambridge etc. : Cambridge University Press. xv., 1991.