RÉCURRENCE DE MARCHES ALÉATOIRES

ALAIN CAMANES

RÉSUMÉ. Où l'on verra qu'il vaut mieux être un homme ivre qu'un oiseau éméché... À partir d'un modèle de marche au hasard, on utilisera du dénombrement, la formule de Stirling, des suites, des intégrales et des dessins pour montrer qu'un homme ivre rentre presque sûrement chez lui alors qu'un oiseau ivre n'a que 34% de chances de retrouver son gîte. Un petit bémol cependant, le temps que met l'homme à retrouver le chemin de sa maison est en moyenne infini...

1. Un peu de dénombrement

1.1. **Le modèle.** Un crabe se déplace soit d'un pas vers la gauche, soit d'un pas vers la droite pour rendre visite à ses amis, sur une plage de sable fin. On note

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_n &= \{\text{trajets possibles du crabe}\} \\ &= \{\text{chemins de longueur } n \text{ à valeurs dans } \mathbb{Z} \text{ de saut } \pm 1\}. \end{aligned}$$

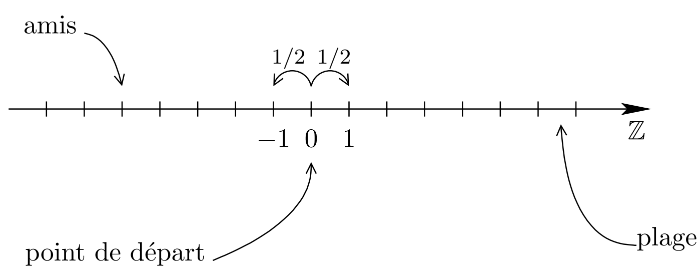

FIG. 1.1. La description des chemins

Remarque. Un chemin est une succession de $+1$ et de -1 et pourra ainsi être décrit comme un vecteur de $\{\pm 1\}^n$.

En mettant en valeur la dimension temporelle du mouvement, on obtient le graphe ci-dessous.

Date: Juin 2009.

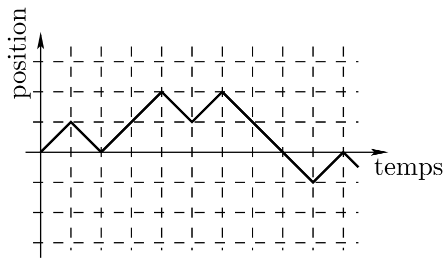

FIG. 1.2. Exemple du graphe d'un chemin

Combien existe-t-il de chemins dans $\mathcal{S}_n$?
Réponse : 2^n = nombre de mots qui s'écrivent comme une succesion de $+1$ et de -1.

Remarque. Aux instant pairs, le crabe se trouve en des points d'ordonnée paire. De même pour les instants impairs, on va donc s'intéresser au cas où les marches aléatoires sont de longueur $2n$.

Hypothèse : Soit $n \in \mathbb{N}$. Tous les chemins de longueur n ont la même probabilité d'occurrence.
Questions : On note

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \{\text{chemins de longueur infinie de sauts } \pm 1\} \\ &= \simeq \{\pm 1\}^{\mathbb{N}}. \end{aligned}$$

Pour tout chemin S dans $\mathcal{S}$, on note τ_1 son premier instant de retour en 0 :

$$\tau_1(S) = \inf\{k > 0;\, S_k = 0\}.$$

On rappelle que par convention $\inf \emptyset = +\infty$.
- Quelle est la proportion des chemins de $\mathcal{S}$ qui repassent en 0, i.e. qui vérifient $\tau_1 < +\infty$?
- Quel est alors la valeur moyenne du temps de retour τ_1 ?

Remarque. Lorsque le temps de retour est fini presque sûrement, la marche aléatoire va revenir une infinité de fois en 0. On dit qu'elle est *récurrente*. Dans le cas contraire, on dit qu'elle est transiente.

Problème : L'ensemble $\mathcal{S}$ est un ensemble de cardinal infini et on doit définir une probabilité sur cet ensemble... La solution théorique à ce problème ne sera pas abordée dans ces notes.

Remarque. La théorie des probabilités a été initialement élaborée pour répondre à des questions de théorie des jeux. Pour les joueurs, ce modèle est également appelé *jeu de pile ou face*. Deux *amis*, Anaïs et Claude, jouent à pile ou face avec une pièce équilibrée, i.e. la probabilité de tomber sur pile est la même que celle de tomber sur face et vaut $1/2$ (la pièce ne peut tomber sur la tranche). Si la pièce tombe sur pile, Claude donne 1 euro à Anaïs, si la pièce tombe sur face, Anaïs donne 1 euro à Claude. Les chemins représentés ci-dessus représentent le gain (en valeur relative !) obtenu par Anaïs au cours du jeu.

1.2. **Compter les chemins finis.** Soient k, $n \in \mathbb{N}$.
Combien de chemins sont issus de 0 et ont pour ordonnée $2k$ à l'instant $2n$? Pour aller en $2k$, il faut au moins faire $2k$ pas vers la droite. Il nous reste alors $2n - 2k$ pas à effectuer durant lesquels on doit globalement rester au même endroit. Ainsi, pendant ces $2n - 2k$ pas, on doit effectuer autant de pas vers la droite que de pas vers la gauche, soit $n - k$ pas vers la droite et $n - k$ pas vers la gauche. Au final, il nous faut effectuer exactement $n + k$

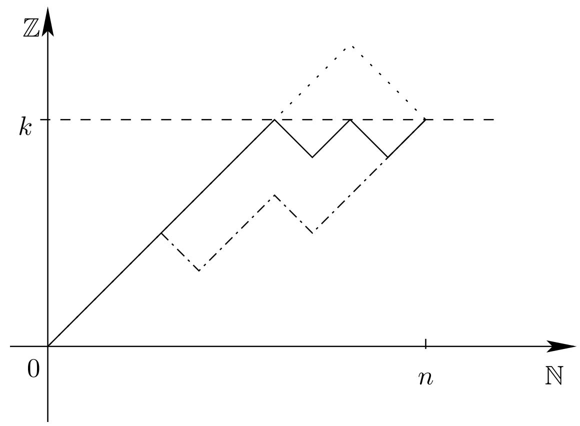

FIG. 1.3. Combien de façons pour monter à l'altitude $2k$?

pas vers la droite et $n - k$ pas vers la gauche. Pour trouver le nombre de chemins il suffit de trouver le nombre de façons de faire $n + k$ pas vers la droite et $n-k$ pas vers la gauche, soit compter le nombre de façons de placer les $n + k$ pas vers la droite parmi les $2n$ pas. Ainsi,

$$\sharp\{\text{Chemins allant de 0 à } 2k \text{ en } 2n \text{ pas}\} = \binom{2n}{n+k}.$$

Remarque. On a montré au passage l'égalité célèbre $\binom{2n}{n+k} = \binom{2n}{n-k}$. En effet, dans le raisonnement précédent, on aurait pu choisir de positionner les $n-k$ pas vers la droite parmi les $2n$ déplacements.

1.3. **Un peu de probabilités.** Soit $S \in \mathcal{S}_{2n}$ et notons S_{2n} la position du marcheur à l'instant $2n$. Par souci de simplicité, nous écrirons

$$\mathbf{P}\,(\text{la marche aléatoire aille de 0 à } 2k \text{ en } 2n \text{ pas}) = \mathbf{P}(S_{2n} = 2k).$$

On a alors, en se rappelant les souvenirs de terminale,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(S_{2n} = 2k) &= \frac{\sharp\{\text{Chemins allant de 0 à } 2k \text{ en } 2n \text{ pas}\}}{\sharp\mathcal{S}_n} \\ &= \frac{\binom{2n}{n+k}}{2^{2n}}. \end{aligned}$$

En particulier, lorsque $k = 0$, en utilisant la célèbre formule de Stirling $n! \sim_{+\infty} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(S_{2n} = 0) &= 2^{-2n}\binom{2n}{n} \\ &= 2^{-2n}\frac{(2n)!}{(n!)^2} \\ &\sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}. \end{aligned}$$

Remarque. Supposons que le marcheur ne se déplace plus sur une plage à une dimension, i.e. $\mathbb{Z}$ mais sur le graphe à d dimensions $\mathbb{Z}^d$. Par exemple, un homme se déplace sur $\mathbb{Z}^2$, un oiseau sur $\mathbb{Z}^3$,... On pourrait montrer que pour tout $d \geq 1$, il existe une constante $c_d > 0$ telle que

$$\mathbf{P}(S_{2n} = 0) \sim_{n\to\infty} \frac{c_d}{n^{d/2}}. \tag{1}$$

2. Intermède : Probabilités, espérances et intégration

Avant de réécrire nos questions initiales dans un langage plus mathématiques, définissons de manière informelle les notions de probabilité et de valeur moyenne (appelée également espérance).

2.1. **Approche intuitive.**

Soit f une fonction de l'espace des chemins à valeur réelle $f : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$. Par exemple, f désigne la position du marcheur au temps n : $f(S) = S_n$. Pour tout ensemble A de $\mathbb{R}$, on définit la fonction indicatrice $\mathbb{1}_{f\in A} : \mathcal{S} \to \{0, 1\}$ de la manière suivante :

$$\mathbb{1}_{f\in A}(S) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad f(S) \in A \\ 0 & \text{si} \quad f(S) \notin A \end{cases}$$

En généralisant les définitions des probabilités sur des ensembles finis et en introduisant la notation $\mathbf{E}$ pour désigner la moyenne, on considère l'égalité intuitive suivante :

$$\begin{aligned} \text{moyenne}\,(\mathbb{1}_{f\in A}) &\simeq \frac{\sharp\{S,\, f(S) \in A\}}{\sharp\mathcal{S}} \\ \mathbf{E}\left[\mathbb{1}_{f\in A}\right] &= \mathbf{P}\left(f \in A\right). \end{aligned}$$

On généralise ensuite ces définitions à des fonctions qui ne sont pas des indicatrices. Pour toute fonction $f : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$, $\mathbf{E}[f]$ désigne sa valeur moyenne. Elle vérifie toutes les propriétés de l'intégrale de Riemann. Par exemple, pour toutes fonctions f, g,

$$\mathbf{E}[f + g] = \mathbf{E}[f] + \mathbf{E}[g].$$

2.2. **Vers l'intégrale de Lebesgue.** Formaliser les notions de probabilité et d'espérance utilise la théorie de l'intégrale de Lebesgue. On considère un ensemble Ω, un ensemble de parties de Ω mesurables (les différents événements qui peuvent arriver) et d'une règle $\mathbf{P}$ qui permet de les mesurer. Par exemple, imaginer que $\Omega = [0, 10]$, les ensembles mesurables sont des intervalles généralisés et la règle est un décimètre. En probabilités, comme Ω est le plus grand ensemble possible, on impose que $\mathbf{P}(\Omega) = 1$. On dira que $\mathbf{P}$ est *une mesure de probabilité*.

Pour tout sous-ensemble A de Ω, $\mathbf{P}(A)$ désigne la mesure de l'ensemble A. Conformément à l'intuition, on aura bien sûr $\mathbf{P}(A) \in [0, 1]$ et si $A \subset B$, $\mathbf{P}(A) \leq \mathbf{P}(B)$.

On peut remarquer que la règle $\mathbf{P}$ peut ne pas être très précise. Ainsi, certains événements peuvent être de probabilité nulle sans être impossibles. Nous verrons, dans le cas des marches aléatoires, qu'en dimension 1, la probabilité que le crabe ne retourne jamais chez lui est nulle ; cet événement est négligeable.

Considérons maintenant une fonction $f : \Omega \to \mathbb{N}$. La moyenne de f s'exprime sous la forme d'une intégrale. Notons $A_i = \{\omega, f(\omega) = i\}$. On définit alors la moyenne ou *espérance* de f par

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[f] &= \sum_{i \in \mathbb{N}} i\mathbf{P}(A_i) \\ &= \sum_{i \in \mathbb{N}} i\mathbf{P}(f = i). \end{aligned}$$

Un petit dessin permet de faire le lien entre moyenne et intégration...

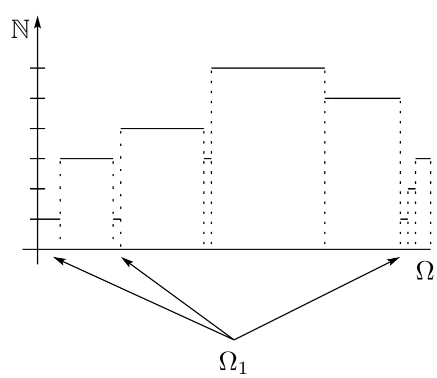

FIG. 2.4. Intégrale d'une fonction à valeurs entières

Remarque. Quand on calcule l'aire sous une courbe grâce à l'intégrale de Riemann, on découpe Ω en intervalles de même longueur, on calcule l'aire du rectangle sous la courbe dans chacun de ces intervalles, puis on fait tendre la longueur de l'intervalle vers 0. Dans le cadre de l'intégrale de Lebesgue, on regarde quand une fonction prend une valeur comprise dans un certain intervalle, on regarde l'aire sous la courbe pour chacun de ces intervalles, puis on fait tendre la longueur de l'intervalle vers 0. Cette différence permet de généraliser de manière très intéressante l'intégrale de Riemann...

On remarque que conformément à l'approche intuitive, on peut écrire

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left[\mathbb{1}_A\right] &= 0\,\mathbf{P}\left(\{\omega,\ \mathbb{1}_A = 0\}\right) + 1\,\mathbf{P}\left(\{\omega,\ \mathbb{1}_A = 1\}\right)\\ &= \mathbf{P}\left(\{\omega,\ \mathbb{1}_A = 1\}\right)\\ &= \mathbf{P}(A).\end{aligned}$$

Remarque. On manipule ici des sommes infinies ! ! Comment s'en sortir ? ? On commence par remarquer que comme tous les termes de la somme sont positifs, la suite $(\sum_{i=1}^{N} i\mathbf{P}(A_i))_N$ est croissante. D'après un théorème bien connu, soit elle est convergente, soit elle diverge vers $+\infty$. Dans cet exposé, on dira qu'elle converge vers $+\infty$... Cet abus de langage simplifie énormément les raisonnements et constitue l'un des atouts de l'intégrale de Lebesgue par rapport à l'intégrale de Riemann.

Remarque. Nous allons intervertir les signes $\sum$ et $\mathbf{E}$ sans ménagement. Or, quand on intervertit une somme et une intégrale, il faut se poser des questions... Ici, la théorie de Lebesgue nous dit que tout se passe bien car on somme des quantités positives.

3. Récurrence et transience

3.1. **La question.** Revenons à nos marches aléatoires. Rappelons que $\mathcal{S}$ désigne l'ensemble des marches aléatoires (de longueur infinie) issues de 0. On suppose que l'on peut construire une mesure $\mathbf{P}$ sur cet ensemble $\mathcal{S}$ (de taille infinie). Ainsi, nous pourrons mesurer, pour tout événement E raisonnable la probabilité qu'une marche aléatoire soit dans l'événement E. Cette mesure de probabilité est telle que, si l'événement E ne considère ce qui se passe que jusqu'à l'instant n, alors on peut effectuer du dénombrement, comme dans la première partie.

Par exemple, regardons l'événement : la marche aléatoire retourne un jour en 0. Un simple dessin montre que beaucoup de marches aléatoires ne retournent pas en 0... Cependant, est-ce que la proportion de ces marches aléatoires est négligeable ?

Commençons par effectuer un lien avec le calcul effectué pour des chemins de taille finie. Soit $S \in \mathcal{S}$.

$$\begin{aligned}
\sharp\{\text{retours en } 0 \text{ de } S\} &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}_{S_{2k}=0} \\
\text{moyenne}\,(\sharp\{\text{retours en } 0 \text{ de } S\}) &= \mathbf{E}\left[\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}_{S_{2k}=0}\right] \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{E}\left[\mathbb{1}_{S_{2k}=0}\right] \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(S_{2k}=0).
\end{aligned}$$

D'après l'estimée (1) précédente (voir les sommes de Riemann), cette quantité sera finie si et seulement si $d/2 > 1$, i.e. $d \geq 3$.

Pour tout $S \in \mathcal{S}$, définissons les temps de retour en 0 du chemin,

$$\begin{aligned}
\tau_0(S) &= 0, \\
\tau_1(S) &= \inf\{k > 0,\, S_k = 0\}, \\
\vdots \;\; &\vdots \;\; \vdots \\
\tau_n(S) &= \inf\{k > \tau_{n-1},\, S_k = 0\}.
\end{aligned}$$

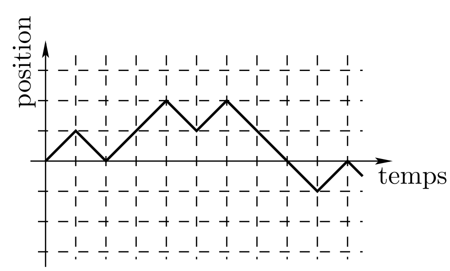

FIG. 3.5. Pour cette marche aléatoire, $\tau_1 = 2$, $\tau_2 = 8$, $\tau_3 = 10$

Connaître la proportion des chemins qui repassent un jour par 0 revient à estimer $\mathbf{P}(\tau_1 < +\infty)$. Ainsi, a-t-on

$$\mathbf{P}(\tau_1 < +\infty) = 1 \Leftrightarrow \text{ retour presque sûr en } 0 \text{ ?}$$

ou

$$\mathbf{P}(\tau_1 < +\infty) < 1 \Leftrightarrow \text{ probabilité non nulle de ne pas revenir ?}$$

On remarque que si un chemin revient exactement n fois en 0 aux instants $i_1, \ldots, i_n$, on a

$$\begin{array}{rcl} S_{i_1} = 0 & \Leftrightarrow & \tau_1 = i_1 < +\infty \\ S_{i_2} = 0 & \Leftrightarrow & \tau_2 = i_2 < +\infty \\ \vdots & & \vdots \\ S_{i_n} = 0 & \Leftrightarrow & \tau_n = i_n < +\infty \\ S_i \neq 0,\, i \geq n & \Leftrightarrow & \tau_{n+1} = +\infty. \end{array}$$

Ainsi, on peut réécrire le nombre de retours en 0,

$$\begin{array}{rcl} \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}_{S_k=0} & = & \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\tau_j<+\infty} \\ \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(S_k = 0) & = & \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{P}(\tau_j < +\infty). \end{array}$$

3.2. **Deux petits calculs et une conclusion.** Pour conclure, il nous reste à recoller les deux morceaux exposés précédemment.

• On va montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbf{P}(\tau_n < +\infty) = \mathbf{P}(\tau_1 < +\infty)^n.$$

Pour cela, on écrit $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$, où pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, $X_k \in \{\pm 1\}$ $(S_0 = 0)$. Ainsi,

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{P}(\tau_n < +\infty) & = & \mathbf{P}\left(\{\tau_{n-1} < +\infty\} \cap \{\exists t,\, X_{\tau_{n-1}+1} + \ldots + X_{\tau_{n-1}+t} = 0\}\right) \\ & \overset{\text{ind.}}{=} & \mathbf{P}(\tau_{n-1} < +\infty) \cdot \mathbf{P}(\underbrace{\exists t, X_1 + \ldots + X_t = 0}_{\tau_1<+\infty}) \\ & = & \mathbf{P}(\tau_1 < +\infty)^n, \end{array}$$

où on a utilisé l'indépendance des incréments des marches aléatoires.

• Notons V le nombre de retours d'une marche aléatoire à l'origine, i.e.

$$V = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_{\{S_{2n}=0\}} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_{\{\tau_n<+\infty\}}.$$

Un simple calcul d'espérance montre que

$$\begin{array}{rcl} \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{E}\left[\mathbb{1}_{\{S_{2n}=0\}}\right] & = & \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{E}\left[\mathbb{1}_{\{\tau_n<+\infty\}}\right] \\ \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{P}(S_{2n} = 0) & = & \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{P}(\tau_n < +\infty) \\ & = & \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{P}(\tau_1 < +\infty)^n \\ & = & \dfrac{1}{1 - \mathbf{P}(\tau_1 < +\infty)}. \end{array}$$

On a ainsi l'équivalence

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{P}(S_{2n}=0)=+\infty \Leftrightarrow \mathbf{P}(\tau_1<+\infty)=1.$$

Et on a vu précédemment que l'on sait évaluer $\mathbf{P}(S_{2n}=0)$.

On a ainsi montré que $\mathbf{P}(\tau_1<+\infty)=1 \Leftrightarrow d=1,2$. Ainsi, le crabe et l'homme sont presque sûrs de retrouver leur point de départ, alors que l'oiseau a des chances de ne jamais rentrer chez lui…

3.3. **En dimension plus grande.**

3.3.1. *En dimension* 2. Un joli argument géométrique permet de montrer qu'on décompose toute marche aléatoire de dimension 2 en deux marches aléatoires de dimension 1 indépendantes…

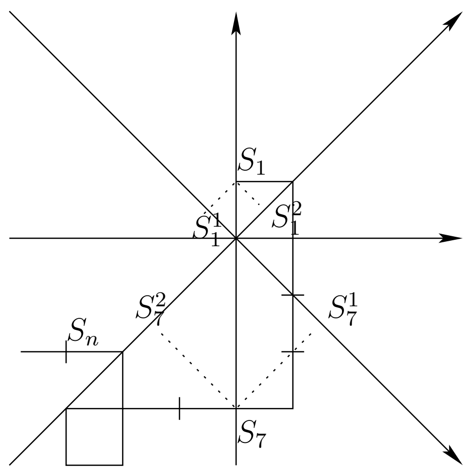

FIG. 3.6. La marche aléatoire en dimension 2 et ses marches aléatoires simples associées

On obtient ainsi

$$\mathbf{P}(S_{2n}=0)=\mathbf{P}(S_{2n}^1=0)^2 \sim \frac{1}{\pi n},$$

et $\sum \mathbf{P}(S_{2n}=0)=+\infty$, soit $\mathbf{P}(\tau_1<+\infty)=1$ et il y a récurrence, i.e. les marches aléatoires retournent presque sûrement en 0.

3.3.2. *En dimension plus grande que* 3. Si on ne veut pas admettre la formule

$$\mathbf{P}(S_{2n}=0)\sim \frac{c_d}{n^{d/2}},$$

et en se retroussant les manches,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(S_{2n}=0) &= \tfrac{1}{(2d)^{2n}} \sum_{n_1+\ldots+n_d=n} \frac{(2n)!}{(n_1!\ldots n_d!)^2} \\
&= \frac{(2n)!}{(n!)^2(2d)^{2n}} \sum_{n_1+\ldots+n_d=n} \left(\frac{n!}{n_1!\ldots n_d!}\right)^2 \\
&\leq \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{2n}} \frac{c_n}{d^{2n}} \cdot d^n \\
&\leq c\frac{c_n}{d^n\sqrt{n}},
\end{aligned}$$

où on a utilisé la formule du multinôme et noté $c_n = \max\{\frac{n!}{n_1!\ldots n_d!}\}$ puis la formule de Stirling pour majorer $2^{-2n}(2n)!/(n!)^2 \leq c/\sqrt{n}$.

Il nous reste à évaluer c_n. Pour cela, on effectue la division euclidienne $n = \ell d + r$. Supposons que $n_1 < \ell$. Comme $\sum_{i=1}^d n_i = n$, il existe un i (prenons $i=2$) tel que $n_2 > \ell$. Mais on a alors

$$\begin{aligned}
\frac{n!}{(n_1+1)!(n_2-1)!n_3!\ldots n_d!} &= \frac{n_2}{n_1+1}\frac{n!}{n_1!\ldots n_d!} \\
&> \frac{n!}{n_1!\ldots n_d!}.
\end{aligned}$$

On n'a donc pas atteint le maximum c_n, ce qui est impossible. D'où, pour tout i, $n_i \geq l$.

Ainsi, on peut calculer la valeur optimale de c_n qui est obtenue lorsque les $n_i \in \{\ell, \ell+1\}$. On a ainsi

$$c_n = \frac{n!}{(\ell!)^{d+r}((\ell+1)!)^r}.$$

En particulier, $\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{n+1}{\ell+1} \leq d$ et $(c_n/d^n)_n$ est décroissante.

On peut finalement étudier la convergence de la série (on supprime les premiers termes...)

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq d} \frac{c_n}{d^n\sqrt{n}} &= \sum_{\ell\geq 1} \sum_{n=d\ell}^{d(\ell+1)-1} \frac{c_n}{d^n\sqrt{n}} \\
&\leq \sum_{\ell\geq 1} \frac{1}{\sqrt{d\ell}} \sum_{n=d\ell}^{d(\ell+1)-1} \frac{c_n}{d^n} \\
&\leq \sum_{\ell\geq 1} \frac{1}{\sqrt{d\ell}} d\frac{c_{d\ell}}{d^{d\ell}} \\
&\leq \sum_{\ell\geq 1} \sqrt{\frac{d}{\ell}} \frac{(d\ell)!}{d^{dl}(\ell!)^d}.
\end{aligned}$$

En utilisant la formule de Stirling, le terme général est équivalent lorsque $\ell \to \infty$ à $\widetilde{c}_d \ell^{-d/2}$. On obtient ainsi une majoration qui permet de conclure que $\sum \mathbf{P}(S_{2k} = 0) < +\infty$ dès que $d \geq 3$.

4. Une question de timing

En dimension 1, on vient de voir que la marche aléatoire retourne presque sûrement en 0. Mais au bout de combien de temps ? Cette question peut-être résolue grâce au principe de réflexion suivant.

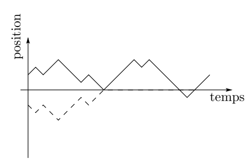

Fig. 4.7. Illustration du principe de réflexion

Pour calculer $\mathbf{E}[\tau_1]$, on cherche à évaluer la $\mathbf{P}(\tau_1 = 2n)$. En effet,

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[\tau_1] &= \mathbf{E}\left[\tau_1 \sum_n \mathbb{1}_{\tau_1 = 2n} + \mathbb{1}_{\tau_1 = +\infty}\right] \\
&= \sum_n \mathbf{E}\left[\tau_1 \mathbb{1}_{\tau_1 = 2n}\right] \\
&= \sum_n \mathbf{E}\left[2n \cdot \mathbb{1}_{\tau_1 = 2n}\right] \\
&= \sum_n 2n \cdot \mathbf{P}(\tau_1 = 2n).
\end{aligned}$$

Ainsi, en notant $N_n(a,b)$ le nombre de marches aléatoires de longueur n reliant a à b, $N_n^{>0}(a,b)$ le nombre de marches aléatoires de longueur n reliant a à b en restant toujours positives et $N_n^0(a,b)$ le nombre de marches aléatoires de longueur n reliant a à b qui touchent 0

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(\tau_1 = 2n) &= \mathbf{P}\left(S_1 \neq 0, \ldots, S_{2n-1} \neq 0, S_{2n} = 0\right) \\
&= \tfrac{1}{2}\mathbf{P}\left(S_1 > 0, \ldots, S_{2n-1} > 0, S_{2n} = 0\right) \\
&= \frac{2^{-2n}}{2} N_{2n}^{>0}(0,0) \\
&= 2^{-2n-1} N_{2n-2}^{>0}(1,1) \\
&= 2^{-2n-1}\left(N_{2n-2}(1,1) - N_{2n-2}^{0}(1,1)\right) \\
&= 2^{-2n-1}\left(N_{2n-2}(1,1) - N_{2n-2}^{0}(-1,1)\right).
\end{aligned}$$

En utilisant le principe de réflexion schématisé figure 4.7 qui assure que $N_n^0(1,1) = N_n(-1,1)$, on obtient,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(\tau_1 = 2n) &= 2^{-2n-1}\left(N_{2n-2}(0,0) - N_{2n-2}(-1,1)\right)\\
&= 2^{-2n-1}\left(N_{2n-2}(0,0) - N_{2n-2}(0,2)\right)\\
&= 2^{-2n-1}\left(\binom{2n-2}{n-1} - \binom{2n-2}{n}\right)\\
&= 2^{-2n-1}\binom{2n}{n}\left(\frac{n^2}{2n(2n-1)} - \frac{n(n-1)}{2n(2n-1)}\right)\\
&= 2^{-2n-1}\binom{2n}{n}\frac{1}{2(2n-1)}\\
&= 2^{-2n}\binom{2n}{n}\frac{1}{4(2n-1)}.
\end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant les équivalents précédents (constantes à revoir...), $2n\mathbf{P}(\tau_1 = 2n) \sim \frac{1}{4\sqrt{\pi n}}$, et on obtient

$$\mathbf{E}[\tau_1] = +\infty.$$

Il ne faut donc pas être pressé de rentrer...

Pour aller plus loin

• Pour une approche intuitive et théorique de la théorie de la mesure :
P. Brémaud, *Introduction aux probabilités*, Springer, 338 p., ISBN : 3-540-13612-6 (1997).

• Pour la démonstration de la transience en dimension 3 :
M. Cottrell , V. Genon-Catalot , C. Duhamel , T. Meyre, *Exercices de probabilités*, Cassini, 309p., ISBN : 2-84225-068-0 (2005).

• Étudier le lien entre séries génératrices - séries entières - et temps de retour des marches aléatoires :
G. Grimmett, D. Stirzaker, *Probability and random processes*,Oxford University Press, 596p., ISBN : 0-19-857223-9 (2001).

• Étudier la loi de l'arcsinus : supposons que dans le jeu de pile ou face, les joueurs lancent la pièce une fois par jour durant une année. Alors, avec probabilité 1/2, un des joueurs va être en déficit, sans discontinuer, du 1er juillet au 31 décembre !
R. Durrett, *Probability : theory and examples*, Duxbury Press, 503p., ISBN : 0-534-24318-5 (1996).

• Pour des marches aléatoires sur $\mathfrak{S}_n$ au lieu de $\mathbb{Z}^d$, étudier les mélanges aléatoires de cartes : Pour mélanger correctement un paquet de 52 cartes, il faut effectuer le mélange *classique* au moins 7 fois !
M. Aigner et G. Ziegler, *Raisonnements divins*, Springer, ISBN : 2-287-33845-4 (2006).

E-mail address: `alain.camanes@univ-nantes.fr`