La conjecture de Parisi
Présentation, relecture de la démonstration proposée par M. Talagrand

Mémoire de DEA
2003–2004

Alain Camanes

Sous la direction de : Philippe Carmona

DEA de modélisation stochastique et statistique

Université Paris-Sud
bât. 425/430
91405, Orsay Cedex

Table des matières

Introduction

Durant ce stage de DEA, nous nous sommes proposés de relire la démonstration de M. Talagrand concernant la conjecture de G. Parisi. Nous allons dans un premier temps présenter le contexte de cette conjecture, à savoir comment elle est issue d'une question portant sur le comportement des verres de spin. Nous proposerons ensuite une relecture de la démonstration de M. Talagrand [3]. Nous avons opté pour une vision plus analytique du problème. Nous ne sommes toutefois pas parvenus à démontrer la conjecture avec le degré de généralité proposé dans [3].

0.1 Présentation de la conjecture de Parisi

0.1.1 Le modèle de Sherrington-Kirkpatrick

Nous nous intéressons aux verres de spin, c'est à dire à une collection finie de v.a. indépendantes (les spins) dont le comportement statistique est régi par une certaine mesure de probabilité. Concrètement, nous nous réfèrerons souvent au modèle de Sherrington-Kirkpatrick. Les spins sont alors des v.a. à valeurs dans $\{-1,1\}$ et l'énergie du système est donnée par l'Hamiltonien :

$$H(\boldsymbol{\sigma}) = H_N(\boldsymbol{\sigma}) = -\frac{\beta}{\sqrt{N-1}} \sum_{i<j} g_{ij}\sigma_i\sigma_j, \tag{0.1.1}$$

où $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \dots, \sigma_N) \in \Sigma_N = \{-1,1\}^N$ désignent N variables aléatoires indépendantes et les (g_{ij}) sont des v.a. gaussiennes centrées réduites indépendantes.
Les variables gaussiennes traduisent l'intéraction entre les particules. Elles sont généralement appelées variables *quenched*. Nous appellerons *espérance quenched*, que nous noterons $\mathbf{E}$, la moyenne prise par rapport à ces variables. La constante β est communément interprétée comme étant l'inverse de la température.

Remarque. On omettra à l'avenir le signe "$-$" qui n'a pas grande importance en ce qui concerne notre étude.

Nous voulons comprendre le comportement de ce système lorsque $N \to \infty$, c'est ce que nous appellerons la *limite thermodynamique* du système. Cette étude a été largement développée dans le cas des hautes températures (i.e. lorsque β est petit). Talagrand propose de généraliser aux basses températures un des résultats obtenus (cf. [1]).
Etant donné un paramètre β, nous considérons la *mesure de Gibbs*, notée :

$$\langle f \rangle = \frac{1}{Z_N} \sum_{\boldsymbol{\sigma}\in\Sigma_N} f(\boldsymbol{\sigma}) \exp\big(-\beta H_N(\boldsymbol{\sigma})\big),$$

où $Z_N = \sum_{\boldsymbol{\sigma}} \exp\big(-\beta H_N(\boldsymbol{\sigma})\big)$ est appelée *fonction de partition.*
Nous étudierons ici la moyenne *quenched* du log de la fonction de partition. Nous noterons ainsi :

$$\alpha_N(\beta) = \frac{1}{N}\mathbf{E}(\log Z_N).$$

En physique, la quantité $F_N(\beta) = -1/\beta \log Z_N$ est appelée *énergie libre.*
Nous allons étudier la limite thermodynamique de α_N. Nous verrons ainsi que la conjecture de Parisi propose une expression de cette limite.
Bien que le modèle SK soit utile pour effectuer des calculs explicites, nous constaterons cependant par la suite que les résultats obtenus peuvent être étendus à des hamiltoniens plus généraux.

0.1.2 L'équation antiparabolique

Dans cette partie, nous suivons la démarche proposée dans [2].
Pour mener notre étude, nous allons utiliser une fonction auxilliaire. Introduisons la quantité :

$$\psi_N(t) = \frac{1}{N}\mathbf{E}\left[\log\left\langle \cosh\left(\frac{t}{\sqrt{N}}\sum_i g_i\sigma_i\right)\right\rangle\right]. \tag{0.1.2}$$

On rappelle que $\langle . \rangle$ désigne la mesure de Gibbs. On relie $\psi_N(t)$ à α_N par la relation :

Théorème 0.1.1. *Pout tout β,*

$$(N+1)\alpha_{N+1}(\beta) = \log 2 + N\alpha_N\left(\beta\sqrt{\frac{N-1}{N}}\right) + N\psi_N(\beta) \tag{0.1.3}$$

Nous allons utiliser ici une technique, qui sera développée dans les sections suivantes, qui permettant d'*interpoler* la valeur de α_N. Introduisons pour cela la quantité :

$$\alpha_N(\beta, t) = \frac{1}{N}\mathbf{E}\left[\log\sum_{\boldsymbol{\sigma}}\exp\left(\frac{\beta}{\sqrt{N-1}}\sum_{i,j} g_{ij}\sigma_i\sigma_j + \frac{t}{\sqrt{N}}\sum_i g_i\sigma_i\right)\right].$$

Remarque. *i.* On vérifie que : $\alpha_N(\beta, 0) = \alpha_N(\beta)$

ii. Le résultat du théorème permet de transférer l'étude de la limite thermodyamique de α_N à celle de ψ_N.

Lemme 0.1.2. *α_N vérifie l'égalité suivante :*

$$(N+1)\alpha_{N+1}(\beta) = \log 2 + N\alpha_N\left(\beta\sqrt{\frac{N-1}{N}}, \beta\right) \tag{0.1.4}$$

Démonstration. Pour démontrer ce lemme, on va utiliser l'indépendance des spins et des variables guenched. Certaines des égalités sont à comprendre en tant qu'égalités en loi.

$$
\begin{aligned}
\sum_{\sigma_1\ldots\sigma_N} \exp\left(\frac{\beta}{\sqrt{N-1}}\sum_{i,j}^{1\ldots N} g_{ij}\sigma_i\sigma_j + \frac{\beta}{\sqrt{N}}\sum_{i=1}^{N} g_i\sigma_i\right) \\
= \frac{1}{2}\sum_{\sigma_1\ldots\sigma_N\sigma_{N+1}} \exp\left(\frac{\beta}{\sqrt{N-1}}\sum_{i,j}^{1\ldots N} g_{ij}\sigma_i\sigma_j + \frac{\beta}{\sqrt{N}}\sum_{i=1}^{N} g_i\sigma_i\right) \\
= \frac{1}{2}\sum_{\sigma_1\ldots\sigma_N} \exp\left(\frac{\beta}{\sqrt{N}}\sum_{i,j}^{1..N} g_{ij}\sigma_i\sigma_j + \frac{\beta}{\sqrt{N}}\sum_{i=1}^{N} g_i\sigma_i\sigma_{N+1}\right) \\
= \frac{1}{2}\sum_{\sigma_1\ldots\sigma_{N+1}} \exp\left(\frac{\beta}{\sqrt{N}}\sum_{i,j}^{1..N+1} g_{ij}\sigma_i\sigma_j\right)
\end{aligned}
$$

A la troisième égalité, nous avons utilisé l'égalité en loi de σ_i et $\sigma_i\sigma_{N+1}$ pour $i \neq N+1$. □

Le théorème est alors obtenu en intégrant partiellement la formule (0.1.4) par rapport au spin σ_{N+1}.
Nous allons à présent étudier le comportement de $\psi = \psi_N$. Pour cela, établissons le théorème suivant :

Théorème 0.1.3. *Etant donnée la fonctionnelle*

$$\psi(\beta) = \frac{1}{N}\mathbf{E}\log\left\langle \cosh\left(\frac{\beta}{\sqrt{N}}\sum_i g_i\sigma_i\right)\right\rangle,$$

il existe pour tout β un paramètre

$$x : [0,1] \ni q \to x(q) \in [0,1],$$

tel que :

$$\psi(\beta) = f(0,0),$$

où $f(q,y)$ est solution de l'équation antiparabolique :

$$\partial_q f + \frac{1}{2}(f'' + x(q)f'^2) = 0.$$

avec la condition au bord :

$$f(1,y) = \log\cosh(\beta y).$$

Nous avons noté f' (resp. f'') la dérivée première (resp. seconde) de f par rapport au paramètre y.

Démonstration. Cette preuve permet de voir comment l'équation antiparabolique est obtenue à partir de la formule d'intégration par parties.
Soit une fonction $f(q,y)$. Introduisons la fonction ϕ définie sur $[0,1]$ par :

$$
\begin{aligned}
\phi(q) &= \frac{1}{N}\mathbf{E}\log\left\langle \exp f\left(q, \sqrt{\frac{q}{N}}\sum_i g_i\sigma_i\right)\right\rangle \\
&= \frac{1}{N}\mathbf{E}\log\left\langle e^{\tilde{f}}\right\rangle
\end{aligned}
$$

La condition au bord $f(1,y) = \log\cosh(\beta y)$ donne :

$$\phi(1) = \psi(\beta)$$
$$\phi(0) = f(0,0)$$

Nous allons montrer que si f est solution de l'équation antiparabolique, ϕ est constante sur $[0,1]$, ce qui nous donnera l'égalité désirée : $\psi(\beta) = f(0,0)$.
Nous allons pour cela exhiber une équation différentielle vérifiée par ϕ.

$$\frac{d}{dq}\exp\widetilde{f} = (\partial_q\widetilde{f})e^{\widetilde{f}} + \frac{1}{2\sqrt{Nq}}\sum_i g_i\sigma_i\widetilde{f}'e^{\widetilde{f}}.$$

Soit

$$\phi'(q) = \mathbf{E}\ \widetilde{\mu}(\partial_q\widetilde{f}) + \frac{1}{2\sqrt{Nq}}\sum_i \mathbf{E}\left[g_i\widetilde{\mu}(\sigma_i\widetilde{f}')\right],$$

où $\widetilde{\mu}(g) = \frac{\langle g e^{\widetilde{f}}\rangle}{\langle e^{\widetilde{f}}\rangle}$.
Nous allons maintenant utiliser la formule d'intégration par parties relative aux variables gaussiennes g_i (pour plus de détail, se reporter à la remarque (0.4.1)). En effet, nous avons :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial g_i}\exp\widetilde{f} &= \sqrt{\frac{q}{N}}\sigma_i\widetilde{f}'\exp\widetilde{f} \\
\frac{\partial}{\partial g_i}\widetilde{f}' &= \sqrt{\frac{q}{N}}\sigma_i\widetilde{f}''
\end{aligned}$$

Nous obtenons ainsi :

$$\phi'(q) = \mathbf{E}\ \widetilde{\mu}\left(\partial_q\widetilde{f} + \frac{1}{2}\widetilde{f}'' + \frac{1}{2}\widetilde{f}'^2\right) - \frac{1}{2N}\sum_i \mathbf{E}\ \widetilde{\mu}^2(\sigma_i\widetilde{f}').$$

Donc, si f vérifie l'équation antiparabolique, avec x tel que

$$(1-x(q))\mathbf{E}\ \widetilde{\mu}(\widetilde{f}'^2)) = \frac{1}{N}\sum_i \mathbf{E}\ \widetilde{\mu}^2(\sigma_i\widetilde{f}'),$$

on remarque que $\phi'(q) = 0$. ϕ ne dépend plus de q et alors

$$\psi(\beta) = \phi(0) = \phi(1) = f(0,0).$$

De plus, nous vérifions que :

$$0 \le \widetilde{\mu}^2(\sigma_i\widetilde{f}') \le \widetilde{\mu}(\widetilde{f}'^2),$$

ce qui assure :

$$0 \le x(q) \le 1.$$

□

La propriété intéressante de l'équation antiparabolique est que f *est continue en* x. De la connaissance de f pour une fonction x en escalier, nous *pourrons* donc déduire la solution $\widetilde{f}$ de l'équation lorsque $\widetilde{x}$ est continue. C'est cette propriété qui motive la démarche utilisée dans le reste du rapport.
Formalisons ce raisonnement :

Théorème 0.1.4. *On note $f(q, y; x, \beta)$ une solution de l'équation antiparabolique :*

$$(E)\begin{cases} \partial_q f + \frac{1}{2}(f'' + x(q)(f')^2) = 0 \\ f(1, y; x, \beta) = \log\cosh(\beta y) \end{cases},$$

où $f' = \partial_y f$. Alors

$$|f(q, y; x, \beta) - f(q, y; \widetilde{x}, \beta)| \leq \frac{\beta^2}{2}\int_q^1 |x(s) - \widetilde{x}(s)|ds.$$

On rappelle que x est une fonction croissante sur $[0, 1]$ telle que $x(0) = 0$, $x(1) = 1$.

Démonstration. $*$ A une fonction x donnée et f solution de (E), on associe l'opérateur

$$D\phi = \partial_q\phi + \frac{1}{2}\phi'' + v\phi,$$

où l'on a noté $v(q, y) = x(q)f'(y)$
On remarque que $Df = \frac{1}{2}xf'^2$. De plus, en notant $f' = \beta h$, on a

$$\frac{d}{dy}(E) = \partial_q f' + \frac{1}{2}f''' + xf'f'' = 0,$$

i.e. $Dh = 0$.
Notons X la solution de l'équation différentielle stochastique

$$dX_q = v(q, X_q)dq + dB_q,$$

où B désigne un mouvement brownien. On remarque que $\langle X_t\rangle = t$
D'après la formule d'Itô :

$$dh(t, X_t) = \frac{\partial h}{\partial y}(t, X_t)B_t + Dhdt.$$

Comme $Dh = 0$, $h(q, X_q)$ est une martingale.
De plus, h est bornée, car

$$|h(1, y)| = |\frac{1}{\beta}f'(1; y) = \tanh(\beta y)| \leq 1.$$

soit $|h(t, y)| = |\mathbf{E}_y[h(1, X_t)]| \leq 1$.

$*$ Nous allons maintenant considérer deux fonctions $x, \widetilde{x}$ et les opérateurs $D, \widetilde{D}$ associés. On remarque que

$$\widetilde{D}f - Df = (\widetilde{v} - v)f'.$$

En posant $\check{D} = \frac{1}{2}(D + \widetilde{D})$, on a

$$\begin{aligned}\check{D}(f - \widetilde{f}) &= \frac{1}{2}(Df - \widetilde{D}\widetilde{f} + \widetilde{D}f - D\widetilde{f}) \\ &= Df - \widetilde{D}\widetilde{f} + \frac{1}{2}(\widetilde{v} - v)(f' - \widetilde{f}') \\ &= \frac{1}{2}xf'^2 - \frac{1}{2}\widetilde{x}\widetilde{f}'^2 + \frac{1}{2}(\widetilde{x}\widetilde{f}' - xf')(f' + \widetilde{f}') \\ &= \frac{1}{2}(\widetilde{x} - x)\widetilde{f}'f'\end{aligned}$$

Donc, comme $|f'| \leq \beta$ d'après le point précédent, nous avons :

$$\check{D}(f - \widetilde{f}) \leq \frac{\beta^2}{2}|\widetilde{x} - x|.$$

Soit $\check{X}$ la solution de l'équation différentielle stochastique :

$$d\check{X}_q = \check{v}(q, \check{X}_q)dq + dB_q.$$

On pose $M_q = (f - \widetilde{f})(q, \check{X}_q)$. On remarque que :

$$dM_q = \text{martingale} + \check{D}(f - \widetilde{f})(q, \check{X}_q)dq.$$

M est donc une vraie martingale. En effet, elle est bornée car $\widetilde{f}'$ et f le sont par β. Son crochet est alors majoré par $2\beta q$. On peut alors lui appliquer le théorème d'arrêt ;

$$0 = \mathbf{E}_y[M_1] = \mathbf{E}_y[M_q] + \mathbf{E}_y \int_q^1 \check{D}(f - \widetilde{f})(q, \check{X}_q)dq.$$

On conclut en utilisant l'inégalité obtenue dans le premier point.

□

Remarque. On sait résoudre l'équation (E) lorsque $x = m_0 \mathbb{1}_{[q,1]}$ est constante, ce qui motive notre démarche. En effet, il suffit de poser $g = \exp m_0 f$. g satisfait alors l'équation de la chaleur $\partial_q g + \frac{1}{2}g'' = 0$. Ce cas sera étudié plus en détail dans la partie suivante.

0.2 Propriétés des solutions de l'équation antiparabolique

0.2.1 notations

Soit un entier k et des réels :

$$0 = m_0 \leq m_1 \leq \ldots \leq m_k = 1,$$

$$0 = q_0 \leq q_1 \leq \ldots \leq q_k \leq q_{k+1} = 1.$$

On notera par la suite $\mathbf{m} = (m_0, \ldots, m_k)$ et $\mathbf{q} = (q_0, \ldots, q_{k+1})$.
On note $x : [0,1] \to \mathbb{R}$ la fonction de répartition constante par morceaux suivante :

$$x(q) = m_l \text{ sur } [q_l, q_{l+1}[.$$

ξ désignera une fonction à valeurs réelles possédant les propriétés suivantes :

$$\xi(0) = 0,\ \xi''(x) > 0. \tag{0.2.1}$$

On considère le changement de temps :

$$v(q) = \xi'(q).$$

On notera $v_l = \xi'(q_l)$.
On note $f(v, y; x, \beta)$ la solution de l'équation :

$$(E) \begin{cases} \partial_v f + \frac{1}{2}(f'' + x(\xi'^{-1})(f')^2) = 0 \\ f(1, y; x, \beta) = f^0(\beta y) \end{cases},$$

où nous avons noté : $f'' = \partial_y^2 f$.
On remarque que la fonction $g_l : (v, y) \to e^{m_l f}$ satisfait l'équation de la chaleur backward sur l'intervalle $[v_l, v_{l+1}[$:

$$(H_l) \begin{cases} \partial_v g_l + \frac{1}{2} g_l'' = 0 \\ g_l(v_l^-, y; x, \beta) = g_{l+1}(v_l^+, y; x, \beta)^{\frac{m_l}{m_{l+1}}} \end{cases}.$$

La deuxième équation est une conséquence de la continuité de f. La présence de ce saut conduit aux définitions par récurrence qui suivent.
Dans un souci de lisibilité, on n'écrira pas toujours par la suite toutes les variables qui entrent en compte.
B_v désigne un mouvement brownien et $\mathcal{F}_v^B = \sigma\{B_s; 0 \leq s \leq v\}$.
La fonction définie ci-dessous est solution de (H_l) :

$$\begin{cases} g_{k+1}(1, y) = \exp f^0(y) \\ g_l(v, y) = \mathbf{E}[g_l(v_{l+1}, B_{v_{l+1}}) | B_v = y] \quad v_l \leq v \leq v_{l+1} \end{cases} \tag{0.2.2}$$

Remarque. Il pourra être intéressant de s'intéresser à d'autres formes de g :
$*$ en utilisant l'espérance conditionnelle :

$$g_l(v, B_v) = \mathbf{E}[g_{l+1}(v_{l+1}, B_{v_{l+1}}) | \mathcal{F}_v^B].$$

$*$ en utilisant le semi-groupe de la chaleur P_v :

$$g_l(v, y) = P_{v_{l+1} - v_l}[g_l(v_{l+1}, .)](y).$$

On peut ainsi définir $F_l = f(v_l, B_l)$ par récurrence :

$$\begin{cases} F_{k+1} = f^0(y) \\ F_l = \frac{1}{m_l} \log \mathbf{E}[\exp m_l F_{l+1} | \mathcal{F}^B_{v_l}], \\ F_0 = \mathbf{E}[F_1] \end{cases} \tag{0.2.3}$$

relation que l'on peut également écrire :

$$F_l = \frac{1}{m_l} \log P_{v_{l+1}-v_l}[\exp m_l f(v_{l+1}, .)](B_{v_l}). \tag{0.2.4}$$

On définit les v.a. d'accroissement suivantes :

$$W_l = \exp m_l(F_{l+1} - F_l),\ T_l = \exp -(m_l - m_{l_1})F_l,$$

$$S_l = W_1 \dots W_l,\ T = T_1 \dots T_k = S_k \exp -F_{k+1}.$$

Remarque. *i.* W_l est $\mathcal{F}^B_{v_{l+1}}$-mesurable.

ii. $\mathbf{E}[W_l | \mathcal{F}^B_{v_l}] = 1$, soit

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[W_l \dots W_k | \mathcal{F}^B_{v_l}] &= \mathbf{E}\big[W_l \dots W_{k-1} \mathbf{E}[W_k | \mathcal{F}^B_{v_k}] \big| \mathcal{F}^B_{v_l}\big] \\ &= \cdots \\ &= 1. \end{aligned}$$

Remarque. Dans le cas où $y \in \mathbb{R}^n$, ces résultats sont généralisables. L'équation (E) s'écrit alors :

$$\partial_v f + \frac{1}{2}(\Delta f + x(\xi'^{-1})|\nabla f|^2) = 0.$$

B désignera alors un mouvement brownien n-dimensionnel et les résultats que nous allons établir dans le cadre de la dimension 1 sont généralisables.

0.2.2 Présentation de la conjecture de Parisi

Nous allons maintenant nous intéresser à la conjecture de Parisi, que Nous allons formuler dans cette partie.
On considèrera en particulier le modèle de Sherrington-Kirkpatrick pour les verres de spin. On note ainsi l'Hamiltonien :

$$H(\boldsymbol{\sigma}) = H_N(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{\beta}{\sqrt{N}} \sum_{i<j} g_{ij} \sigma_i \sigma_j, \tag{0.2.5}$$

où $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \dots, \sigma_N) \in \Sigma_N = \{-1, 1\}^N$ et les (g_{ij}) sont des v.a. gaussiennes centrées réduites indépendantes.

On définit sur $\{-1,1\}^N$ la mesure de Gibbs :

$$\langle f \rangle = \sum_{\boldsymbol{\sigma}} f(\boldsymbol{\sigma}) e^{H(\boldsymbol{\sigma})}.$$

On note *l'overlap* quantifiant la différence entre 2 spins de même loi :

$$R_{1,2} = R_{1,2}(\sigma^1, \sigma^2) = \frac{1}{N} \sum_{i \le N} \sigma_i^1 \sigma_i^2,$$

σ^1, σ^2 étant deux copies indépendantes de σ.
On suppose qu'il existe une fonction ξ satisfaisant (0.2.1) et une suite $c(N)$ avec $c(N) \to 0$ telles que :

$$\forall \sigma^1, \sigma^2 \in \{-1,1\}^N, \left| \frac{1}{N} \mathbf{E}[H_N(\sigma^1) H_N(\sigma^2)] - \xi(R_{1,2}) \right| \le c(N). \tag{0.2.6}$$

Posons $f^0(y) = \log \cosh(h + y)$.
On remarque, en effet, que :

$$\sum_{\epsilon_1 = \pm 1} \exp(a\epsilon_1) = 4 \cosh(a).$$

On définit les F_l comme en (0.2.3).
Soit

$$\mathcal{P}_k(\mathbf{m}, \mathbf{q}) = \log 2 + F_0 - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{k} m_l (\theta(q_{l+1}) - \theta(q_l)), \tag{0.2.7}$$

où

$$\theta(q) = q\xi'(q) - \xi(q).$$

On note :

$$\mathcal{P}(\xi, h) = \inf_{k, \mathbf{m}, \mathbf{q}} \mathcal{P}_k(\mathbf{m}, \mathbf{q}).$$

Théorème 0.2.1. *On a*

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \mathbf{E} \log \sum_{\boldsymbol{\sigma}} \exp \Big(H_N(\sigma) + h \sum_{i \le N} \sigma_i \Big) = \mathcal{P}(\xi, h).$$

Remarque. Si l'Hamiltonnien est celui du modèle SK définit en 0.1.1, on a $\xi(q) = \beta^2 q^2$ et $\theta(q) = \xi(q)$.

Nous nous proposons de démontrer ce théorème pour β petit, i.e. pour de hautes températures.

0.3 Etude de propriétés analytiques

Avant de nous intéresser à la démonstration proposée par M. Talagrand, étudions quelques propriétés relatives aux F_l.

0.3.1 Formules de dérivation

Lemme 0.3.1. *Soit α une variable telle que m_l, v_l et v_{l+1} ne dépendent pas de α.*

$$\partial_\alpha F_l = \mathbf{E}[W_l \partial_\alpha F_{l+1} | \mathcal{F}^B_{v_l}]. \tag{0.3.1}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} F_l &= \frac{1}{m_l} \log \mathbf{E}[e^{m_l F_{l+1}} | \mathcal{F}^B_{v_l}] \\ \partial_\alpha F_l(y) &= \frac{1}{m_l \exp m_l F_l} \mathbf{E}[m_l \ \partial_\alpha F_{l+1} \ e^{m_l F_{l+1}} | \mathcal{F}^B_{v_l}] \\ &= \mathbf{E}[e^{m_l (F_{l+1} - F_l)} \ \partial_\alpha F_{l+1} | \mathcal{F}^B_{v_l}] \\ &= \mathbf{E}[W_l \ \partial_\alpha F_{l+1} | \mathcal{F}^B_{v_l}] \end{aligned}$$

□

On peut ainsi établir la propriété suivante :

Proposition 0.3.2.

$$\partial_\alpha F_0 = \mathbf{E}[S_{l-1} \ \partial_\alpha F_l]. \tag{0.3.2}$$

Démonstration. Récurrence immédiate compte tenu de la mesurabilité des W_i par rapport à $\mathcal{F}^B_{v_{i+1}}$. □

Cette équation de dérivation nous incite à introduire une nouvelle mesure qui paraîtra plus adaptée dans l'étude de notre problème.
Rappelons que :

$$\mathbf{E}[W_l \dots W_k | \mathcal{F}^B_{v_l}] = 1.$$

On va ainsi introduire la mesure sur $\{-1, 1\}^N$:

$$\gamma_l(f) = \mathbf{E}[W_l \dots W_k \langle f \rangle | \mathcal{F}^B_{v_l}].$$

En notant $\gamma_l^{\otimes 2}$ la mesure produit sur $\{-1, 1\}^{2N}$ issue de γ_l, nous poserons :

$$\mu_l(f) = \mathbf{E}[S_{l-1} \gamma_l^{\otimes 2}(f)]. \tag{0.3.3}$$

Nous nous intéressons maintenant aux dérivations d'ordre 2.

Proposition 0.3.3. *Pour α, β tels que $(m_0, \dots, m_l)$ et $(v_0, \dots, v_{l+1})$ ne dépendent pas de α et β, on a :*

$$\begin{aligned} \partial_\alpha \partial_\beta F_0 =& \mathbf{E}[W_0 \dots W_{l-1} \ \partial_\alpha \partial_\beta F_l] \\ &- \sum_{i=r}^{l} (m_i - m_{i-1}) \mathbf{E}\big[W_i \dots W_{l-1} \mathbf{E}[S_{l-1} \ \partial_\alpha F_l | \mathcal{F}^B_{v_i}] \ \partial_\beta F_l\big]. \end{aligned} \tag{0.3.4}$$

Démonstration. On part de (0.3.1) :

$$\begin{aligned}\partial_\alpha\partial_\beta F_0 &= \mathbf{E}[W_0 \dots W_{l-1}\ \partial_\alpha\partial_\beta F_l] + \sum_{i=0}^{l} \mathbf{E}[W_0 \dots W_{l-1}\ \partial_\alpha W_i\ \partial_\beta F_l] \\ &= I + II\end{aligned}$$

Or,

$$\partial_\alpha W_i = m_i\ (\partial_\alpha F_{i+1} - \partial_\alpha F_i) W_i.$$

Soit,

$$\begin{aligned}II &= \sum_{i=1}^{l} (m_{i-1} - m_i)\ \mathbf{E}[\partial_\alpha F_i\ W_0 \dots W_{l-1}\ \partial_\beta F_l] \\ &= \sum_{i=1}^{l} (m_{i-1} - m_i)\ \mathbf{E}[W_0 \dots W_{l-1}\ \mathbf{E}[W_i \dots W_{l-1}\ \partial_\alpha F_l | \mathcal{F}^B_{v_i}]\ \partial_\beta F_l]\end{aligned}$$

où, dans la première égalité, on a noté pour des raisons de lisibilité $m_{-1} = 0$. La deuxième égalité découle de (0.3.1). La proposition est obtenue en utilisant la mesurabilité des W_i par rapport à $\mathcal{F}^B_{i+1}$ □

Remarque. La propriété précédente peut être généralisée au calcul de $\partial_\alpha\partial_\beta F_r$, mais nous n'aurons pas besoin de cette formule par la suite.

0.3.2 Une dérivation particulière

Nous aurons besoin plus précisément de la dérivée : $\partial_{v_r} F_0$. Nous allons la calculer dans cette partie.

Proposition 0.3.4. *Nous avons la propriété suivante :*

$$\partial_{v_r} F_0 = -\frac{m_r - m_{r-1}}{2} \mathbf{E}[S_{r-1} F_r'^2]. \tag{0.3.5}$$

Démonstration. D'après (0.3.1),

$$\partial_{v_r} F_0 = \mathbf{E}[S_{r-2} \partial_{v_r} F_{r-1}].$$

Pour évaluer $\partial_{v_r} F_{r-1}$, nous allons utiliser la définition de F_l via les semi-groupes :

$$\begin{aligned}
\partial_{v_r} F_{r-1} &= \partial_{v_r} \frac{1}{m_{r-1}} \log P_{v_r - v_{r-1}}[\exp m_{r-1} f_r(v_r, .)](B_{v_{r-1}}) \\
&= \frac{1}{m_{r-1} \exp m_{r-1} F_{r-1}} \partial_{v_r} P_{v_r - v_{r-1}}[\exp m_{r-1} f_r(v_r, .)](B_{v_{r-1}}) \\
&= e^{-m_{r-1}F_{r-1}} \Big(\frac{1}{2} P_{v_r - v_{r-1}}[(\exp m_{r-1} f_r(v_r, .))''](B_{v_{r-1}}) \\
&\qquad + P_{v_r - v_{r-1}}[\partial_{v_r} \exp m_{r-1} f_r(v_r, .)](B_{v_{r-1}}) \Big) \\
&= \frac{1}{2} e^{-m_{r-1}F_{r-1}} P_{v_r - v_{r-1}}[(m_{r-1} - m_r) f_r'^2 \exp m_{r-1} f_r(v_r, .)](B_{v_{r-1}}) \\
&= \frac{1}{2}(m_{r-1} - m_r) \mathbf{E}[W_{r-1} F_r'^2 | \mathcal{F}^B_{v_{r-1}}]
\end{aligned}$$

l'avant dernière égalité est obtenue en remarquant que f est solution de (E). □

0.3.3 Bref rappel à propos de convexité

Lemme 0.3.5. *Pour toute fonction f de classe $\mathcal{C}^2$, $\lambda \mapsto \frac{1}{m} \log \mathbf{E}[\exp m f(\lambda)]$ est convexe. En outre, la composée de fonctions convexes est une fonction convexe.*

Démonstration. Immédiat □

0.4 Bornes de Guerra et couplage

0.4.1 Borne de Guerra

Dans toute la suite, $(B_{v,i})_v$ désigne une copie indépendante de $(B_v)_v$. On se place dans le cadre de la partie 0.2.1, avec :

$$H_t(\sigma) = \sqrt{t} H_N(\sigma) + \sum_{i \le N} \sigma_i \Big(h + \sqrt{1-t}\ B_{v_{k+1}, i} \Big),$$

$$F_0 = \log \sum_{\boldsymbol{\sigma}} \exp H_t(\sigma),$$

$$\varphi(t) = \frac{1}{N} F_0.$$

Théorème 0.4.1. *Pour $0 < t < 1$, on a :*

$$\begin{aligned}
\varphi'(t) &= -\frac{1}{2} \sum_{l=1}^{k} m_l (\theta(q_{l+1}) - \theta(q_l)) \\
&\quad - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{k} (m_l - m_{l-1}) \mu_l (\xi(R_{1,2}) - R_{1,2} \xi'(q_l) + \theta(q_l)) + \mathcal{R},
\end{aligned}$$

où $|\mathcal{R}| \le c(N)$.

Cette démonstration repose essentiellement sur la formule d'intégration par parties pour des v.a. gaussiennes. Ainsi, si on considère une famille $\mathbf{h} = (h_j)_{j\in J}$ de v.a. gaussiennes ($|J| < \infty$) et $F : \mathbb{R}^J \to \mathbb{R}$ une fonction de croissance sous exponentielle, on a :

$$\mathbf{E}[h_i F(\mathbf{h})] = \sum_{j\in J} \mathbf{E}[h_i h_j]\mathbf{E}[\partial_{x_j} F(\mathbf{h})]. \tag{0.4.1}$$

Démonstration. Nous reprenons ici la démonstration de M. Talagrand. Il est utile de bien comprendre celle-ci. En effet, nous généraliserons cette méthode pour démontrer le prochain théorème.

D'après la relation (0.3.1), on a :

$$\varphi'(t) = \mathbf{E}[S_{r-1}\partial_t F_{k+1}].$$

En utilisant les définitions de T_l vues en 0.2.1, on remarque que l'on peut écrire :

$$\varphi'(t) = \frac{1}{N}\mathbf{E}[T\partial_y \exp F_{k+1}] = I + \sum_{0\le p\le k} II(p),$$

où l'on a noté :

$$I = \frac{1}{2N\sqrt{t}}\mathbf{E}\big[T\sum_{\boldsymbol{\sigma}} H(\boldsymbol{\sigma})\exp H_t(\boldsymbol{\sigma})\big]$$
$$II(p) = -\frac{1}{2N\sqrt{1-t}}\mathbf{E}\big[T\sum_{\boldsymbol{\sigma},i} \sigma_i Y_{p,i}\exp H_t(\boldsymbol{\sigma})\big]$$

On a définit la v.a. gaussienne : $Y_{p,i} = B_{v_{p+1},i} - B_{v_p,i}$.

Pour calculer le premier terme, nous utilisons la formule d'intégration par parties rappelées précédemment, la famille de v.a. gaussiennes considérée étant : $(H(\boldsymbol{\sigma}))_{\boldsymbol{\sigma}\in\Sigma_N}$. Par un abus de notation, nous noterons $\frac{\partial}{\partial H(\boldsymbol{\sigma})}$ la dérivation par rapport à ces v.a.

Nous rappelons que

$$\zeta(\boldsymbol{\sigma}^1,\boldsymbol{\sigma}^2) = \frac{1}{N}\mathbf{E}(H(\boldsymbol{\sigma}^1)H(\boldsymbol{\sigma}^2)).$$

On remarque que :

$$\frac{\partial T_l}{\partial H(\boldsymbol{\rho})} = (m_{l-1}-m_l)\frac{\partial F_l}{\partial H(\boldsymbol{\rho})}T_l.$$

On peut ainsi écrire : $I = III + \sum_{1\le l\le k} I(l)$, où :

$$III = \frac{1}{2\sqrt{t}}\mathbf{E}\big[T\sum_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\rho}} \zeta(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\rho})\frac{\partial}{\partial H(\boldsymbol{\rho})}\exp H_t(\boldsymbol{\sigma})\big]$$
$$I(l) = \frac{m_{l-1}-m_l}{2\sqrt{t}}\mathbf{E}\big[T\sum_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\rho}} \zeta(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\rho})\exp H_t(\boldsymbol{\sigma})\frac{\partial F_{l,t}}{\partial H(\boldsymbol{\rho})}\big]$$

Nous nous intéressons maintenant à III :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial H(\boldsymbol{\rho})} &= \sqrt{t}\sum_{\boldsymbol{\sigma}} \zeta(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\sigma})\langle \mathbb{1}_{\{\boldsymbol{\sigma}\}}\rangle_t \exp F_{k+1} \\ &= \sqrt{t}\langle \zeta(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\sigma})\rangle_t \exp F_{k+1}\end{aligned}$$

Soit, comme $|\zeta(\boldsymbol{\sigma}^1,\boldsymbol{\sigma}^2)-\xi(R_{1,2})| \leq c(N)$ et $\zeta(R_{1,1}) = \zeta(1)$:

$$III = \frac{1}{2}\xi(1) + \mathcal{R},$$

avec $|\mathcal{R}| \leq c(N)$.
De même, nous montrons que (en utilisant (0.3.1) pour la deuxième égalité) :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial H(\boldsymbol{\rho})} F_{k+1} &= \sqrt{t}\langle \mathbb{1}_{\{\boldsymbol{\rho}\}}\rangle_t \\ \frac{\partial}{\partial H(\boldsymbol{\rho})} F_l &= \sqrt{t}\mathbf{E}_l\big[W_l \dots W_k \langle \mathbb{1}_{\{\boldsymbol{\rho}\}}\rangle_t\big] \\ &= \sqrt{t}\gamma_l(\mathbb{1}_{\{\boldsymbol{\rho}\}})\end{aligned}$$

Finalement, utilisant le fait que $\exp H_t(\boldsymbol{\sigma}) = \langle \mathbb{1}_{\{\boldsymbol{\sigma}\}}\rangle_t \exp F_{k+1}$, nous obtenons :

$$I(l) = \frac{m_{l-1}-m_l}{2}\sum_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\rho}} \zeta(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\rho})\mathbf{E}\big[W_1 \dots W_k \langle \mathbb{1}_{\{\boldsymbol{\rho}\}}\rangle_t \gamma_l(\mathbb{1}_{\{\boldsymbol{\sigma}\}})\big].$$

On utilise alors la propriété de dédoublement pour conclure :

$$\begin{aligned}I(l) &= \frac{m_{l-1}-m_l}{2}\sum_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\rho}} \mu_l(\zeta(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\rho})) \\ &= \frac{m_{l-1}-m_l}{2}\mu_l(\xi(R_{1,2})) + \mathcal{R}\end{aligned}$$

On peut montrer de manière analogue, que :

$$II(p) = -\frac{1}{2}\big(\xi'(q_{p+1} - \xi'(q_p)\big)\Bigg(1 + \sum_{p\leq l\leq k}(m_{l-1}-m_l)\mu_l(R_{1,2})\Bigg).$$

Soit, en utilisant l'hypothèse $\xi'(q_0) = \xi'(0) = 0$:

$$\sum_{0\leq p\leq k} II(p) = -\frac{1}{2}\Bigg[\xi'(1) + \sum_{1\leq l\leq k}(m_{l-1}-m_l)\xi'(q_l)\mu_l(R_{1,2})\Bigg].$$

On obtient finalement le résultat annoncé :

$$\begin{aligned}2\varphi'(t) &= \xi(1) - \xi'(1) + \sum_{1\leq l\leq k}(m_{l-1}-m_l)\mu_l(\xi(R_{1,2}) - R_{1,2}\xi'(q_l)) + 2\mathcal{R} \\ &= -\theta(1) - \sum_{1\leq l\leq k}(m_{l-1}-m_l)\theta(q_l) \\ &\qquad \sum_{1\leq l\leq k}(m_{l-1}-m_l)\mu_l(\xi(R_{1,2}) - R_{1,2}\xi'(q_l) + \theta(q_l)) + 2\mathcal{R}\end{aligned}$$

□

0.4.2 Le couplage

Comme le fait Talagrand, on sera amené à utiliser le cas où y est un vecteur de dimension 2. On supposera et notera alors :

$$\begin{aligned} f^0(y) &= f^0(y_1) + f^0(y_2), \\ B_v &= (B_v^1, B_v^2). \end{aligned} \tag{0.4.2}$$

La technique développée par Talagrand est la suivante. Soit $r \in \{1, \ldots, k\}$. On définit un mouvement brownien de dimension 2 B_v tel que :

$$\begin{cases} B_v^1 = B_v^2, & v < v_r \\ (B_v^1 - B_{v_r}^1) \text{ soit indépendant de } (B_v^2 - B_{v_r}^2), & v \geq v_r \end{cases}. \tag{0.4.3}$$

On notera $F_l^\star, W_l^\star, \ldots$ les v.a. construites sur le même schéma que dans la section 0.2.1 mais avec les vecteurs :

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= (\frac{m_0}{2}, \ldots, \frac{m_{r-1}}{2}, m_r, \ldots, m_k), \\ \mathbf{q} &= (q_0, \ldots, q_{k+1}). \end{aligned}$$

On peut établir le lemme suivant :

Lemme 0.4.2. *On note F_l^1, F_l^2 deux copies indépendantes de F_l (construit à partir de $f^0(y)$). On a alors :*

$$\begin{aligned} F_l^\star &= F_l^1 + F_l^2, \\ l < r,\ W_l^\star &= W_l^1 = W_l^2, \\ l \geq r,\ W_l^\star &= W_l^1 W_l^2. \end{aligned}$$

Démonstration. On va démontrer ce résultat par récurrence descendante. Lorsque $k = r + 1$, il s'agit de l'hypothèse (0.4.2).

Pour $l \geq r$, comme $(B_{v_{l+1}}^1 - B_{v_l}^1)$ et $(B_{v_{l+1}}^2 - B_{v_l}^2)$ sont indépendants,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[\exp m_l(F_{l+1}^1 + F_{l+1}^2)|\mathcal{F}_{v_l}^B] &= \mathbf{E}[\exp m_l F_{l+1}^1|\mathcal{F}_{v_l}^B]\ \mathbf{E}[\exp m_l F_{l+1}^2|\mathcal{F}_{v_l}^B] \\ &= \exp m_l(F_l^1 + F_l^2). \end{aligned}$$

Pour $l < r$, comme $(B_{v_{l+1}}^1 - B_{v_l}^1) = (B_{v_{l+1}}^2 - B_{v_l}^2)$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[\exp \frac{m_l}{2}(F_{l+1}^1 + F_{l+1}^2)|\mathcal{F}_{v_l}^B] &= \mathbf{E}[\exp \frac{m_l}{2} 2F_{l+1}^1|\mathcal{F}_{v_l}^B] \\ &= \exp m_l F_l^1 \\ &= \exp \frac{m_l}{2}(F_l^1 + F_l^2). \end{aligned}$$

□

0.4.3 Intégration par parties et couplage

On va, dans cette section, combiner les deux idées développées précédemment. Soient B, $\widetilde{B}$ deux browniens indépendants. B^1, B^2 (resp. $\widetilde{B}^1$, $\widetilde{B}^2$ désigneront des copies de B (resp. $\widetilde{B}$) satisfaisant (0.4.3). Pour $i = 1 \ldots N$, $B^j_{v,i}$ (resp. $\widetilde{B}^j_{v,i}$) est une copie indépendante de B^j_v (resp. $\widetilde{B}^j_v$). On définit les quantités suivantes :

$$H_{t,v}(\boldsymbol{\sigma}^1, \boldsymbol{\sigma}^2) = \sum_{j=1,2} \Big(\sqrt{vt} H(\boldsymbol{\sigma}^j) + \sum_{i \le N} \sigma^j_i \Big(h + \sqrt{1-t}\widetilde{B}^j_{v_k,i} + \sqrt{t}\sqrt{1-v} B^j_{v_k,i} \Big) \Big),$$

$$F_{k+1,v} = \log \sum_{R_{1,2}=u} \exp H_{t,v}(\boldsymbol{\sigma}^1, \boldsymbol{\sigma}^2),$$

$$\eta(v) = \frac{1}{N} F_{0,v}.$$

La définition par récurrence des $F_{l,v}$ se fera par rapport à la filtration $\mathcal{F} = \mathcal{F}^B \vee \mathcal{F}^{\widetilde{B}}$. On notera $\mathbf{E_l}$ l'espérance conditionnelle par rapport à $\mathcal{F}_{v_l}$.

Théorème 0.4.3. *Pour* $0 < v < 1$, *on a :*

$$\eta'(v) \le -t \sum_{l=1}^{k} m_l \Big(\theta(q_{l+1}) - \theta(q_l) \Big) + tM(u-q_r)^2 + c(N),$$

où $M = \frac{\theta(q_r) + \xi(u) - u\xi'(q_r)}{(u-q_r)^2}$.
Soit,

$$\eta(1) \le \eta(0) - t \sum_{l=1}^{k} m_l \Big(\theta(q_{l+1}) - \theta(q_l) \Big) + tM(u-q_r)^2 + c(N).$$

Avant de démontrer ce théorème, fixons quelques notations :

$$S_u = \{(\boldsymbol{\sigma}^1, \boldsymbol{\sigma}^2); R_{1,2} = u\},$$

$$\langle f \rangle_v \exp F_{k+1,v} = \sum_{S_u} f(\boldsymbol{\sigma}^1, \boldsymbol{\sigma}^2) \exp H_{t,v}(\boldsymbol{\sigma}^1, \boldsymbol{\sigma}^2),$$

$$\gamma_{l,v}(f) = \mathbf{E_l}[W_{l,v} \ldots W_{k,v} \langle f \rangle_v],$$

$$\mu_{l,v}(f) = \mathbf{E_l}[W_{1,v} \ldots W_{l-1,v} \gamma^{\otimes 2}_{l,v}(f)].$$

Démonstration. Pour des raisons de commodité, comme dans la partie 0.4.1, on décomposera $B_{v_{k+1}} = \sum_{p=0}^{k} B_{v_{p+1}} - B_{v_p}$ pour faire apparaître des v.a. gaussiennes. Conformément à la formule (0.3.1), nous avons :

$$\begin{aligned} \eta'(v) &= \frac{1}{N} \mathbf{E}[T_v \partial_t \exp F_{k+1,v}] \\ &= I + \sum_{p=0}^{k} II(p). \end{aligned}$$

Avec, en utilisant la propriété d'intégration par rapport à la famille $\big(H(\boldsymbol{\sigma})\big)_{\boldsymbol{\sigma}}$:

$$\begin{aligned}
I &= \frac{\sqrt{t}}{2N\sqrt{v}}\ \mathbf{E}\Big[T_v \sum_{(\boldsymbol{\sigma}^1,\boldsymbol{\sigma}^2)\in S_u} \Big(H(\boldsymbol{\sigma}^1)+H(\boldsymbol{\sigma}^2)\Big)\exp H_{t,v}(\boldsymbol{\sigma}^1,\boldsymbol{\sigma}^2)\Big]\\
&= \frac{\sqrt{t}}{2\sqrt{v}}\ \mathbf{E}\Big[\sum_{(\boldsymbol{\sigma}^1,\boldsymbol{\sigma}^2)\in S_u}\sum_{\boldsymbol{\sigma}}\Big(\zeta(\boldsymbol{\sigma}^1,\boldsymbol{\sigma})+\zeta(\boldsymbol{\sigma}^2,\boldsymbol{\sigma})\Big)\frac{\partial T_v\exp H_{t,v}(\boldsymbol{\sigma}^1,\boldsymbol{\sigma}^2)}{\partial H(\boldsymbol{\sigma})}\Big]\\
&= III+\sum_{l=1}^{k} I(l).
\end{aligned}$$

Or, nous avons :

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial}{\partial H(\boldsymbol{\sigma})}\exp H_{t,v}(\boldsymbol{\sigma}^1,\boldsymbol{\sigma}^2)=\sqrt{vt}(\mathbb{1}_{\{\boldsymbol{\sigma}^1=\boldsymbol{\sigma}\}})+\mathbb{1}_{\{\boldsymbol{\sigma}^2=\boldsymbol{\sigma}\}})\exp H_{t,v}(\boldsymbol{\sigma}^1,\boldsymbol{\sigma}^2)\\
\dfrac{\partial}{\partial H(\boldsymbol{\sigma})}F_{k+1,v}=\sqrt{vt}\displaystyle\sum_{(\boldsymbol{\tau}^1,\boldsymbol{\tau}^2)\in S_u}(\mathbb{1}_{\{\boldsymbol{\tau}^1=\boldsymbol{\sigma}\}}+\mathbb{1}_{\{\boldsymbol{\tau}^2=\boldsymbol{\sigma}\}})\langle\mathbb{1}_{(\boldsymbol{\tau}^1,\boldsymbol{\tau}^2)}\rangle_v
\end{cases}.$$

Remarquons également que :

$$T_v\exp H_{t,v}(\boldsymbol{\sigma}^1,\boldsymbol{\sigma}^2)=W_{1,v}\ldots W_{k,v}\langle\mathbb{1}_{(\boldsymbol{\sigma}^1,\boldsymbol{\sigma}^2)}\rangle_v.$$

On peut ainsi évaluer III :

$$\begin{aligned}
III &= \frac{t}{2}\mathbf{E}\Big[\sum_{(\boldsymbol{\sigma}^1,\boldsymbol{\sigma}^2)\in S_u}\sum_{\boldsymbol{\sigma}}\Big(\zeta(\boldsymbol{\sigma}^1,\boldsymbol{\sigma})+\zeta(\boldsymbol{\sigma}^2,\boldsymbol{\sigma})\Big)W_{1,v}\ldots W_{k,v}\langle\mathbb{1}_{(\boldsymbol{\sigma}^1,\boldsymbol{\sigma}^2)}\rangle_v\big(\mathbb{1}_{\{\boldsymbol{\sigma}^1=\boldsymbol{\sigma}\}}+\mathbb{1}_{\{\boldsymbol{\sigma}^2=\boldsymbol{\sigma}\}}\big)\Big]\\
&= \frac{t}{2}\mathbf{E}\Big[W_{1,v}\ldots W_{k,v}\sum_{(\boldsymbol{\sigma}^1,\boldsymbol{\sigma}^2)\in S_u}\Big(\zeta(\boldsymbol{\sigma}^1,\boldsymbol{\sigma}^1)+\zeta(\boldsymbol{\sigma}^2,\boldsymbol{\sigma}^2)+2\zeta(\boldsymbol{\sigma}^1,\boldsymbol{\sigma}^2)\Big)\langle\mathbb{1}_{(\boldsymbol{\sigma}^1,\boldsymbol{\sigma}^2)}\rangle_v\Big]\\
&= \frac{t}{2}\Big(2\xi(1)+2\xi(u)\Big)+\mathcal{R}.
\end{aligned}$$

Pour calculer $I(l)$, nous avons besoin de connaître :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_{l,v}}{\partial H(\boldsymbol{\sigma})} &= \mathbf{E_l}\Big[W_{l,v}\ldots W_{k,v}\frac{\partial F_{k+1,v}}{\partial H(\boldsymbol{\sigma})}\Big]\\
&= \sqrt{vt}\mathbf{E_l}\Big[W_{l,v}\ldots W_{k,v}\sum_{(\boldsymbol{\tau}^1,\boldsymbol{\tau}^2)\in S_u}(\mathbb{1}_{\{\boldsymbol{\tau}^1=\boldsymbol{\sigma}\}}+\mathbb{1}_{\{\boldsymbol{\tau}^2=\boldsymbol{\sigma}\}})\langle\mathbb{1}_{(\boldsymbol{\tau}^1,\boldsymbol{\tau}^2)}\rangle_v\Big]\\
&= \sqrt{vt}\sum_{(\boldsymbol{\tau}^1,\boldsymbol{\tau}^2)\in S_u}(\mathbb{1}_{\{\boldsymbol{\tau}^1=\boldsymbol{\sigma}\}}+\mathbb{1}_{\{\boldsymbol{\tau}^2=\boldsymbol{\sigma}\}})\gamma_{l,v}(\mathbb{1}_{(\boldsymbol{\tau}^1,\boldsymbol{\tau}^2)})
\end{aligned}$$

On peut maintenant évaluer :

$$\begin{aligned}
I(l) &= \frac{t}{2}(n_{l-1}-n_l)\mathbf{E}\Big[W_{1,v}\dots W_{k,v}\sum_{(\boldsymbol{\sigma}^1,\boldsymbol{\sigma}^2)\in S_u}\ \sum_{(\boldsymbol{\tau}^1,\boldsymbol{\tau}^2)\in S_u}\ \sum_{\boldsymbol{\sigma}}\Big(\zeta(\boldsymbol{\sigma}^1,\boldsymbol{\tau}^1)+\zeta(\boldsymbol{\sigma}^2,\boldsymbol{\tau}^2)+ \\
&\qquad +\zeta(\boldsymbol{\sigma}^1,\boldsymbol{\tau}^2)+\zeta(\boldsymbol{\sigma}^2,\boldsymbol{\tau}^1)\Big)\gamma_{l,v}(\mathbb{1}_{(\boldsymbol{\tau}^1,\boldsymbol{\tau}^2)})\langle\mathbb{1}_{(\boldsymbol{\tau}^1,\boldsymbol{\tau}^2)}\rangle_v\Big] \\
&= \frac{t}{2}(n_{l-1}-n_l)\mu_{l,v}\Big(\zeta(\boldsymbol{\sigma}^1,\boldsymbol{\tau}^1)+\zeta(\boldsymbol{\sigma}^2,\boldsymbol{\tau}^2)+\zeta(\boldsymbol{\sigma}^1,\boldsymbol{\tau}^2)+\zeta(\boldsymbol{\sigma}^2,\boldsymbol{\tau}^1)\Big) \\
&= \frac{t}{2}(n_{l-1}-n_l)\mu_{l,v}\Big(\xi(R(\boldsymbol{\sigma}^1,\boldsymbol{\tau}^1))+\xi(R(\boldsymbol{\sigma}^2,\boldsymbol{\tau}^2))+\xi(R(\boldsymbol{\sigma}^1,\boldsymbol{\tau}^2))+\xi(R(\boldsymbol{\sigma}^2,\boldsymbol{\tau}^1))\Big)+\mathcal{R}.
\end{aligned}$$

Il nous reste à présent à calculer $II(p)$. On note

$$Y^j_{p,i} = B^j_{v_{p+1},i} - B^j_{v_p,i},$$

des v.a. gaussiennes centrées de variance $(v_{p+1}-v_p)$.
On a ainsi, en utilisant la formule d'intégration par parties :

$$\begin{aligned}
II(p) &= -\frac{\sqrt{t}}{2N\sqrt{1-v}}\mathbf{E}\Big[T\sum_{R_{1,2}=u}\sum_{i,j}\sigma_i^j Y^j_{p,i}\exp H_{t,v}(\boldsymbol{\sigma}^1,\boldsymbol{\sigma}^2)\Big] \\
&= -\frac{\sqrt{t}}{2N\sqrt{1-v}}\sum_{i',j',p'}\mathbf{E}\Big[\sum_{R_{1,2}=u}\sum_{i,j}\sigma_i^j\mathbf{E}[Y^j_{p,i}Y^{j'}_{p',i'}]\frac{\partial(T\exp H_{t,v}(\boldsymbol{\sigma}^1,\boldsymbol{\sigma}^2))}{\partial Y^{j'}_{p',i'}}\Big] \\
&= -\frac{\sqrt{t}}{2N\sqrt{1-v}}\mathbf{E}\Big[\sum_{R_{1,2}=u}\sum_{i,j}\sigma_i^j\sum_{j'}\mathbf{E}[Y^j_{p,i}Y^{j'}_{p,i}]\frac{\partial(T\exp H_{t,v}(\boldsymbol{\sigma}^1,\boldsymbol{\sigma}^2))}{\partial Y^{j'}_{p,i}}\Big],
\end{aligned}$$

la dernière égalité étant due au fait que, pour $i \neq i'$ ou $p \neq p'$ $Y^j_{p,i}$ est indépendant de $Y^{j'}_{p',i'}$, les $Y^j_{p,i}$ étant centrées.
D'après les propriétés de couplage, on est maintenant contraint de distinguer selon les valeurs de p. En effet,

$$\begin{cases} 1\le p<r, & Y^1_{p,i}=Y^2_{p,i} \\ r\le p\le k, & Y^1_{p,i} \text{ est indépendant de } Y^2_{p,i} \end{cases}.$$

Si $r \le p \le k$,

$$\begin{aligned}
II(p) &= -\frac{\sqrt{t}}{2N\sqrt{1-v}}\mathbf{E}\Big[\sum_{R_{1,2}=u}\sum_{i,j}\sigma_i^j(v_{p+1}-v_p)\frac{\partial(T\exp H_{t,v}(\boldsymbol{\sigma}^1,\boldsymbol{\sigma}^2))}{\partial Y^j_{p,i}}\Big] \\
&= IV(p)+\sum_{l=p+1}^{k} IV(l),
\end{aligned}$$

où la dernière égalité provient du fait que pour $l \le p$, $F_{l,v}$ ne dépend pas de Y_p.

Or, on remarque que,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial Y_{p,i}^j} \exp H_{t,v}(\boldsymbol{\sigma}^1, \boldsymbol{\sigma}^2) = \sqrt{t(1-v)}\sigma_i^j \exp H_{t,v}(\boldsymbol{\sigma}^1, \boldsymbol{\sigma}^2) \\ \dfrac{\partial}{\partial Y_{p,i}^j} F_{k+1,v} = \sqrt{t(1-v)} \displaystyle\sum_{(\boldsymbol{\tau}^1,\boldsymbol{\tau}^2)\in S_u} \tau_i^j \langle \mathbb{1}_{(\boldsymbol{\tau}^1,\boldsymbol{\tau}^2)} \rangle_v \end{cases}.$$

D'où

$$\begin{aligned} IV &= -\frac{t}{2N}(v_{p+1}-v_p)\sum_{i,j}\mathbf{E}\Big[\sum_{(\boldsymbol{\sigma}^1,\boldsymbol{\sigma}^2)\in S_u} \sigma_i^j\sigma_i^j\langle \mathbb{1}_{(\boldsymbol{\sigma}^1,\boldsymbol{\sigma}^2)}\rangle_v W_{1,v}\dots W_{k,v}\Big] \\ &= -\frac{t}{2}N(v_{p+1}-v_p)\sum_{j=1,2}\mathbf{E}\Big[\sum_{(\boldsymbol{\sigma}^1,\boldsymbol{\sigma}^2)\in S_u} \langle \mathbb{1}_{(\boldsymbol{\sigma}^1,\boldsymbol{\sigma}^2)}\rangle_v W_{1,v}\dots W_{k,v}\Big] \\ &= -t(v_{p+1}-v_p). \end{aligned}$$

On obtient par une méthode analogue,

$$IV(l) = -\frac{t}{2}(v_{p+1}-v_p)(n_{l-1}-n_l)\mu_{l,v}(R(\boldsymbol{\sigma}^1,\boldsymbol{\tau}^1)+R(\boldsymbol{\sigma}^2,\boldsymbol{\tau}^2)).$$

Si $0 \leq p \leq r$,

$$\begin{aligned} II(p) &= -\frac{\sqrt{t}}{2\sqrt{1-v}}\mathbf{E}\Big[\sum_{R_{1,2}=u}\sum_{i,j}\sigma_i^j(v_{p+1}-v_p)\Big(\frac{\partial(T\exp H_{t,v}(\boldsymbol{\sigma}^1,\boldsymbol{\sigma}^2))}{\partial Y_{p,i}^1}+\frac{\partial(T\exp H_{t,v}(\boldsymbol{\sigma}^1,\boldsymbol{\sigma}^2))}{\partial Y_{p,i}^2}\Big)\Big] \\ &= \widetilde{IV}(p) + \sum_{l=p}^{k}\widetilde{IV}(l). \end{aligned}$$

Avec,

$$\widetilde{IV}(p) = -t(v_{p+1}-v_p)(1+u),$$

$$\widetilde{IV}(l) = -\frac{t}{2}(v_{p+1}-v_p)(n_{l-1}-n_l)\mu_{l,v}\Big(R(\boldsymbol{\sigma}^1,\boldsymbol{\tau}^1)+R(\boldsymbol{\sigma}^2,\boldsymbol{\tau}^2)+R(\boldsymbol{\sigma}^1,\boldsymbol{\tau}^2)+R(\boldsymbol{\sigma}^2,\boldsymbol{\tau}^1)\Big).$$

Finalement, on obtient d'une part :

$$\begin{aligned} &\sum_{p=0}^{r-1}\widetilde{IV}(p)+\sum_{p=r}^{k}IV(p) \\ &\qquad = \sum_{p=0}^{r-1}-t(v_{p+1}-v_p)(1+u)+\sum_{p=r}^{k}-t(v_{p+1}-v_p) \\ &\qquad = -t(1+u)v_r - t(v_{k+1}-v_k) \\ &\qquad = -t\Big(\xi'(1)+u\xi'(q_r)\Big), \end{aligned}$$

et d'autre part :

$$\sum_{p=0}^{r-1}\sum_{l=p+1}^{k}\widetilde{IV}(l)+\sum_{p=r}^{k}\sum_{l=p+1}^{k}IV(p)=\sum_{l=1}^{k}v_{p_l}(n_{l-1}-n_l)\mu_{l,v}\Big(R(\boldsymbol{\sigma}^1,\boldsymbol{\tau}^1)+R(\boldsymbol{\sigma}^2,\boldsymbol{\tau}^2)\Big)$$
$$+\sum_{l=1}^{k}v_{l\wedge r}(n_{l-1}-n_l)\mu_{l,v}\Big(R(\boldsymbol{\sigma}^1,\boldsymbol{\tau}^2)+R(\boldsymbol{\sigma}^2,\boldsymbol{\tau}^1)\Big).$$

On remarque finalement que

$$\xi(x)-x\xi'(q)\geq-\theta(q).$$

En mettant maintenant bout à bout l'expression de I et celle des $II(p)$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\eta'(v) &\leq t\Big(\xi(1)-\xi'(1)+\xi(u)-u\xi'(q_r)\Big)\\
&\quad -t\sum_{l=1}^{k}(n_{l-1}-n_l)\theta(q_l)-t\sum_{l=1}^{k}(n_{l-1}-n_l)\theta(q_{l\wedge r})+c(N)\\
&\leq -t\sum_{l=1}^{r-1}2(n_{l-1}-n_l)\theta(q_l)-t\sum_{l=r}^{k}(n_{l-1}-n_l)\theta(q_l)+\\
&\quad +t\Big((1-n_{r-1})\theta(q_r)-\theta(q_1)+\xi(u)-u\xi'(q_r)\Big)+c(N)\\
&\leq -t\sum_{l=1}^{r-1}2n_l\big(\theta(q_{l+1})-\theta(q_l)\big)-t\sum_{l=r}^{k}n_l\big(\theta(q_{l+1})-\theta(q_l)\big)+\\
&\quad +t\Big(\theta(q_r)+\xi(u)-u\xi'(q_r)\Big)+c(N).
\end{aligned}$$

D'où le théorème attendu, d'après la définition de $\mathbf{n}$. □

Remarque. Dans le cas du modèle (0.1.1), $M=2\beta^2$. On remarque également que, dans le cas général, d'après la formule de Taylor, on peut prendre $M=\max_{[0,1]}\xi''$.

0.5 Résultat préliminaire

0.5.1 Rappels et notations

Rappelons que,

$$\mathcal{P}_k(\mathbf{m},\mathbf{q})=\log 2+F_0-\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{k}m_l(\theta(q_{l+1})-\theta(q_l)),\tag{0.5.1}$$

où

$$\theta(q)=q\xi'(q)-\xi(q).$$

Remarque. Compte tenu de la définition de v, on a :

$$\frac{\partial\theta}{\partial v}=q.$$

On note :

$$\mathcal{P}(\xi) = \inf_{k,\mathbf{m},\mathbf{q}} \mathcal{P}_k(\mathbf{m},\mathbf{q}).$$

Soit $\mathbf{m}^0 = (m_0^0, \dots, m_k^0)$ et $\mathbf{q}^0 = (q_0^0, \dots, q_{k+1}^0)$ deux vecteurs tels que :

$$\text{à k fixé, } \mathcal{P}_k(\mathbf{m}^0, \mathbf{q}^0) \text{ est minimal} \tag{0.5.2}$$

Soit $1 \leq r \leq k$
On note

$$\Phi(q_r) = \mathcal{P}_k(\mathbf{m^0}, \mathbf{q^{0,r}}),$$

où $\mathbf{q^{0,r}} = (q_0^0, \dots, q_{r-1}^0, q_r, q_{r+1}^0, \dots, q_{k+1}^0)$.

0.5.2 Utilisation de l'optimalité

Dans cette partie, nous allons exploiter l'optimalité de Φ en q_r^0.
D'après les définitions,

$$\partial_{v_r}\Phi = \partial_{v_r}F_0 - \frac{1}{2}q_r(m_{r-1}^0 - m_r^0).$$

On utilise alors le calcul effectué en (0.3.5) pour obtenir :

$$\partial_{v_r}\Phi(q_r) = \frac{m_r^0 - m_{r-1}^0}{2}\Big(q_r - \mathbf{E}[S_{r-1}F_r'^2]\Big).$$

Or, $\partial_{v_r}\Phi(q_r^0) = 0$, soit :

$$\mathbf{E}[S_{r-1}F_r'^2]\Big|_{q_r=q_r^0} = q_r^0 \tag{0.5.3}$$

0.5.3 Théorème préliminaire

On introduit les quantités suivantes :

$$H_{t,1}(\boldsymbol{\sigma}^1, \boldsymbol{\sigma}^2) = H_t(\boldsymbol{\sigma}^1, \boldsymbol{\sigma}^2) = \sum_{j=1,2} \sqrt{t}H(\boldsymbol{\sigma}^j) + \sum_{i\leq N} \sigma_i^j(h + \sqrt{1-t}B^j_{v_{k+1},i}),$$

$$F_{0,u} = F_{0,1} = \log \sum_{R_{1,2}=u} \exp H_t(\boldsymbol{\sigma}^1, \boldsymbol{\sigma}^2),$$

$$F_{l,u} \text{ la suite de v.a. ainsi construite,}$$

$$\Psi(t,u) = \frac{1}{N}\mathbf{E}[F_{1,u}],$$

$$\psi(t) = \varphi(0) - \frac{t}{2}\sum_{l=1}^{k} m_l^0\Big(\theta(q_{l+1}^0) - \theta(q_l^0)\Big).$$

Remarque. Compte tenu des définitions précédentes, nous avons :

$$\eta(1) = \Psi(t,u).$$

On constate également que lorsque $v = 0$, $H_{0,t}(\boldsymbol{\sigma}^1, \boldsymbol{\sigma}^2) = \sum_{i,j} \sigma_i^j \big(h + B^j_{v_k,i}\big)$ ne dépend plus de t.

Théorème 0.5.1. *Conformément aux notations précédemment introduites, on a, pour tout t, u, r :*

$$\Psi(t,u) \leq 2\psi(t) - \frac{(1-4tM)}{4}(u - q_r^0)^2 + c(N).$$

Dans cette section, on note

$$\begin{aligned} V_{k+1} &= \log \sum_{\boldsymbol{\sigma}^1, \boldsymbol{\sigma}^2} H_{0,t}(\boldsymbol{\sigma}^1, \boldsymbol{\sigma}^2) \\ &= \log(\cosh x_1 \cosh x_2 \cosh \lambda + \sinh x_1 \sinh x_2 \sinh \lambda), \end{aligned}$$

et on définit V_l, $l \leq k$ comme en (0.2.3) en utilisant les vecteurs $\mathbf{n}^0$, $\mathbf{q}^0$.
On peut établir la relation suivante entre η et V :
comme

$$\sum_{R_{1,2}=u} \exp H_0(\sigma^1, \sigma^2) \leq \exp(-\lambda N u) \sum_{\sigma^1, \sigma^2} \exp\Big(H_0(\sigma^1, \sigma^2) + h \sum_{i \leq N} \sigma_i^1 \sigma_i^2\Big),$$

on a :

$$\begin{aligned} F_{k+1,0,u} &\leq V_{k+1} - \lambda N u + 2N \log 2 \\ \eta(0) &\leq V_0 - \lambda u + 2 \log 2 \\ \Psi(t,u) &\leq 2\log 2 + V_0 - \lambda u - t \sum_{l=1}^{k} m_k^0 \Big(\theta(q_{l+1}^0) - \theta(q_l^0)\Big) + tM(u - q_r^0)^2 + c(N), \end{aligned}$$

où pour la dernière inégalité on a utilisé le théorème 0.4.3.
On va s'intéresser à V comme fonction de λ pour optimiser la majoration précédente.

Lemme 0.5.2. *On a :*

i. $V_0(0) = 2F_0$,

ii. $\partial_\lambda V_0(0) = \mathbf{E}[S_{r-1} F_r'^2] = q_r^0$,

iii. $V_0(\lambda)$ *est une fontion convexe,*

iv. $|\partial_\lambda^2 V| \leq 2$.

Démonstration. *i.* Cette assertion est une conséquence immédiate des relations (0.4.2). En effet, lorsque $\lambda = 0$, on remarque que $V_{k+1} = F^\star_{k+1} = 2F_{k+1}$

ii. Cette proposition est également une application des relations (0.4.2). On utilise la formule (0.3.1) :

$$\begin{aligned} V_0'(0) &= \mathbf{E}[S_{r-1}^\star V_{k+1}'(0)] \\ &= \mathbf{E}[W_1^\star \dots W_k^\star \tanh(B_{v_{k+1}}^1)\tanh(B_{v_{k+1}}^2)] \\ &= \mathbf{E}\Big[W_1 \dots W_{r-1}\mathbf{E}[W_r \dots W_k \tanh(B_{v_{k+1}})|\mathcal{F}_{v_r}^B]^2\Big] \\ &= \mathbf{E}[S_{r-1}F_r'^2] \end{aligned}$$

L'assertion est alors une conséquence immédiate de la propriété d'optimalité (0.5.3).

iii. La convexité de V_0 se déduit du lemme 0.3.5

iv. Ce résultat est une conséquence de 0.3.4. En effet, en étudiant V_{k+1} comme fonction de $\cosh(\lambda)$ et $\sinh(\lambda)$, on remarque que :

$$|\partial_\lambda V_{k+1}| \leq 1,\ |\partial_\lambda^2 V_{k+1}| \leq 1.$$

Or, nous avons également vu que :

$$\mathbf{E}[|S_r|] = \mathbf{E}[S_r] = 1.$$

Le résultat est alors immédiat.

□

Lemme 0.5.3. *Pour toute fonction α convexe de dérivée seconde bornée par L, on a :*

$$\inf_\lambda \alpha(\lambda) \leq \alpha(0) - \frac{\alpha'(0)^2}{2L} \tag{0.5.4}$$

Démonstration. α étant convexe, notons λ_0 le point où elle atteint son minimum. On a alors :

$$\begin{aligned} \alpha'^2(0) - \alpha'^2(\lambda_0) &= \int_{\lambda_0}^0 2\alpha''(s)\alpha'(s)ds \\ \alpha'^2(0) &\leq 2L(\alpha(0) - \alpha(\lambda_0)) \\ \alpha(\lambda_0) &\leq \alpha(0) - \frac{\alpha'^2(0)}{2L} \end{aligned}$$

□

On applique ce résultat à $\alpha(\lambda) = V_0(\lambda) - \lambda u$ qui vérifie les hypothèses d'après le lemme 0.5.2

$$\inf_\lambda (V_0(\lambda) - \lambda u) \leq 2F_0 - \frac{|q_r^0 - u|^2}{4}.$$

On obtient ainsi la conclusion du théorème 0.5.1 :

$$\Psi(t,u) \leq 2\psi(t) - (\frac{1}{4} - tM)(u - q_r^0)^2.$$

0.6 La formule de Parisi

On va chercher à établir le théorème suivant :

Théorème 0.6.1. *Pour $t \leq t_0$, on a :*

$$\lim_{N\to\infty} \varphi(t) = \psi(t).$$

Il suffirait alors de montrer que l'on peut choisir t_0 aussi proche de 1 pour pouvoir démontrer la formule de Parisi (cf. remarque ultérieure).

Démonstration de la formule de Parisi. La preuve se décompose en deux étapes.

i. Une première inégalité est conséquence de la borne de Guerra obtenue lors du théorème 0.4.1. En effet, comme

$$\xi(x) - x\xi'(q) + \theta(q) \geq 0,$$

cette borne peut s'écrire sous la forme :

$$\varphi(1) \leq \varphi(0) - \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{k} m_l\big(\theta(q_{l+1}) - \theta(q_l)\big) + c(N).$$

Or, on remarque que, d'après la défintion de φ :

$$\begin{cases} \varphi(1) = \frac{1}{N}\mathbf{E}\log\sum_{\boldsymbol{\sigma}}\exp\Big(H(\boldsymbol{\sigma}) + h\sum_{i\leq N}\sigma_i\Big) \\ \varphi(0) = \log 2 + F_0 \end{cases}.$$

On obtient ainsi l'inégalité :

$$\frac{1}{N}\mathbf{E}\log\sum_{\boldsymbol{\sigma}}\exp\Big(H(\boldsymbol{\sigma}) + h\sum_{i\leq N}\sigma_i\Big) \leq \mathcal{P}_k(\mathbf{m}^0, \mathbf{q}^0) + c(N).$$

Soit,

$$\frac{1}{N}\mathbf{E}\log\sum_{\boldsymbol{\sigma}}\exp\Big(H(\boldsymbol{\sigma}) + h\sum_{i\leq N}\sigma_i\Big) \leq \mathcal{P}(\xi, h).$$

ii. Pour la deuxième, on va utiliser le théorème 0.6.1.
En effet, nous avons d'après la borne de Guerra (0.4.1)

$$\varphi'(t) \leq L + c(N).$$

Remarque. Dans un soucis de précision en ce qui concerne les constantes, on remarque que :

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &\leq \frac{1}{2}\sum_{l=0}^{k}\Big(\theta(q_{l+1}) - \theta(q_l)\Big) + \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{k}(m_l - m_{l-1}) + c(N) \\ &\leq \frac{1}{2}(\theta(1) + 1) + c(N). \end{aligned}$$

Pour le modèle 0.1.1, $L = \frac{\beta^2+1}{2}$.

Soit,

$$\lim_N |\varphi(1) - \varphi(t_0)| \leq L(1 - t_0).$$

Or, d'après le théorème 0.6.1, $\phi(t_0) = \psi(t_0)$:

$$\limsup_N |\varphi(1) - \psi(t_0)| \leq (1 - t_0).$$

On a ainsi :

$$\begin{aligned} \limsup_N |\varphi(1) - \psi(1)| &\leq \limsup_N |\varphi(1) - \psi(t_0)| + \limsup_N |\psi(1) - \psi(t_0)| \\ &\leq L(1 - t_0) + L(1 - t_0) \\ \limsup_N |\varphi(1) - \psi(1)| &\leq 2L(1 - t_0). \end{aligned}$$

On remarque que $\psi(1) = \mathcal{P}_k(\mathbf{m}^0, \mathbf{q}^0)$ d'où le résultat :

$$\begin{aligned} \limsup_N \varphi(1) &\geq \mathcal{P}_k(\mathbf{m}^0, \mathbf{q}^0) - 2L(1 - t_0) \\ &\geq \mathcal{P}(\xi, h) - L(1 - t_0). \end{aligned}$$

Le résultat final s'obtient en faisant tendre t_0 vers 1.

□

Ce théorème repose sur la proposition suivante :

Proposition 0.6.2. *Soit $t_0 < 1$, il existe une constante K (indépendante de N) telle que, ayant défini $(\mathbf{m}^0,\ \mathbf{q}^0)$ comme en* (0.5.2)*, pour tout $\epsilon_1 > 0$, pour tout $1 \leq r \leq k$, pour tout $t \leq t_0$ et pour N assez grand, on a :*

$$\mu_r\Big(\mathbb{1}_{\{(\boldsymbol{\sigma}^1, \boldsymbol{\sigma}^2); (R_{1,2} - q_r^0)^2 \geq K(\psi(t) - \varphi(t)) + \epsilon_1\}}\Big) \leq \epsilon_1.$$

Remarque. Cette proposition peut se voir comme une concentration de $R_{1,2}$ autour de q_r^0 sous la mesure μ_r.

Démonstration du théorème 0.6.1. Comme ξ est de classe $\mathcal{C}^2$ donc de dérivée seconde bornée sur $[0, 1]$, la formule de Taylor nous donne :

$$\begin{aligned} |\xi(R_{1,2}) - \xi(q_r^0) + (q_r^0 - R_{1,2})\xi'(q_r^0)| &\leq M(R_{1,2} - q_r^0)^2 \\ |\xi(R_{1,2}) - R_{1,2}\xi'(q_r^0) + \theta(q_r^0)| &\leq M(R_{1,2} - q_r^0)^2. \end{aligned}$$

On utilise alors la proposition 0.6.2 :

$$\begin{aligned} \mu_r(\xi(R_{1,2}) - R_{1,2}\xi'(q_r^0) + \theta(q_r^0)) &\leq \mu_r(M(R_{1,2} - q_r^0)^2) \\ &\leq 2\mu_r\Big((R_{1,2} - q_r^0)^2 \geq K(\psi(t) - \varphi(t)) + \epsilon_1\Big) \\ &\qquad + 2M\mu_r\Big((R_{1,2} - q_r^0)^2 \leq K(\psi(t) - \varphi(t)) + \epsilon_1\Big) \\ &\leq 2M\epsilon_1 + 2MK(\psi(t) + \varphi(t)) + 2M\epsilon_1 \\ &\leq 2MK(\psi(t) + \varphi(t)) + 4M\epsilon_1 \end{aligned}$$

où on rappelle que $M = \max\limits_{[0,1]} \xi''$ et K est la constante intervenant dans la proposition 0.6.2.
Le théorème 0.4.1 nous donne alors (sachant que $\varphi(0) = \psi(0)$) :

$$\begin{aligned}
(\psi(t) - \varphi(t))' &\leq 2MK(\psi(t) - \varphi(t)) + 4M\epsilon_1 \\
\psi(t) - \varphi(t) &\leq 4M\epsilon_1 t + 2MK \int_0^t (\psi(s) - \varphi(s))ds \\
&\leq 4M\epsilon_1 t + \int_0^t 4M\epsilon_1 s 2MKe^{2MK(t-s)}ds \\
&\leq 4M\epsilon_1 t + 8M^2K\epsilon_1\Big(- \frac{1 + 2MKt - e^{2MKt}}{(2MK)^2}\Big) \\
&\leq \frac{2}{K}\epsilon_1(e^{2MKt_0} - 1),
\end{aligned}$$

où on a utilisé l'inégalité de Gronwall pour obtenir la troisième inégalité.
La borne de Guerra 0.4.1 assure la positivité de $\psi(t) - \varphi(t)$. K doit donc être positive comme nous allons le montrer dans les propositions à venir.
Le résultat est obtenu en prenant ϵ_1 aussi petit que l'on veut. □

Pour établir la proposition 0.6.2, on va utiliser le théorème 0.5.1 pour démontrer la proposition suivante :

Proposition 0.6.3. *Supposons qu'il existe* ϵ_2 *tel que :*

$$\Psi(t, u) \leq 2\varphi(t) - \epsilon_2.$$

Alors il existe K' *indépendante de* N *telle que,*

$$\mu_r(\mathbb{1}_{\{R_{1,2}=u\}}) \leq K'e^{-\frac{N}{K'}}.$$

Démonstration de la proposition 0.6.2. Notons $K(t) = \frac{1-4tM}{4}$ la constante intervenant dans le théorème 0.5.1. Soit $\epsilon_1 > 0$. Supposons que :

$$(u - q_r^0)^2 \geq 2K(t)(\psi(t) - \varphi(t)) + \epsilon_1.$$

Le théorème 0.5.1 nous dit que dès lors que $K(t) \geq 0$:

$$\Psi(t, u) \leq 2\varphi(t) - \frac{\epsilon_1}{K(t)} + 2c(N).$$

L'hypothèse de la proposition 0.6.3 est alors vérifiée pour N grand, en posant $\epsilon_2 = \epsilon_1/K - \epsilon_3$. D'où, comme $R_{1,2}$ peut prendre au plus $2N + 1$ valeurs :

$$\mu_r\Big(\mathbb{1}_{\{(\boldsymbol{\sigma}^1,\boldsymbol{\sigma}^2);(R_{1,2}-q_r^0)^2 \geq K(t)(\psi(t)-\varphi(t))+\epsilon_1\}}\Big) \leq (2N + 1)K'e^{-\frac{N}{K'}}.$$

La proposition s'obtient en prenant N assez grand. □

Remarque. C'est la condition $K(t) \geq 0$ qui va nous contraindre à choisir $t \leq t_0$. En effet, celle-ci s'écrit :

$$\begin{aligned} 1 - 4tM &\geq 0 \\ t &\leq \frac{1}{4M} \end{aligned}$$

Soit $t_0 = 1/4M$. Pour établir les propositions précédentes, il suffit alors de choisir $K = K(t_0)$.
Le problème est que nous ne pouvons pas alors faire tendre t_0 vers 1 en général. En effet, cela reviendrait à avoir $M \leq 4$, soit dans le cas du modèle 0.1.1

$$\beta \leq 2\sqrt{2}.$$

On n'obtient ainsi la formule de Parisi que pour des *températures élevées*. De plus, si nous avions obtenu un tel résultat pour tout β, nous aurions : $\lim_N \varphi(t) = \psi(t)$ quel que soit k, ce qui est impossible.

Finalement, la proposition 0.6.2 repose entièrement sur le lemme suivant qui décrit une propriété de concentration des v.a. gaussiennes.

Lemme 0.6.4. *Supposons que*

$$\mathbf{E}[F_{1,u}] \leq \mathbf{E}[F_1] - \epsilon_2 N.$$

Alors, il existe K' tel que :

$$\mathbf{E}[S_k\langle \mathbb{1}_{\{R_{1,2}=u\}}\rangle] \leq K' e^{-\frac{N}{K'}}.$$

Démonstration de la proposition 0.6.3. Une simple division par N permet de vérifier que les hypothèses du lemme et de la proposition sont identiques. Pour le reste, on a vu que, grâce aux formules (0.4.2), on a :

$$\mathbf{E}[S_k\langle f\rangle] = \mu_r(f).$$

□

Démonstration du lemme. Posons $U = \langle \mathbb{1}_{\{R_{1,2}=u\}}\rangle \leq 1$
On remarque que

$$\mathbf{E}[W_l \dots W_k U | \mathcal{F}^B_{v_l}] \leq 1.$$

On va prouver par récurrence descendante que :

$$F_{l+1,u} \geq F_{l+1} + \frac{1}{m_{l+1}} \log \mathbf{E}[W_{l+1} \dots W_k U | \mathcal{F}^B_{v_{l+1}}].$$

Lorsque $l = k$, cela découle des définitions.

Sinon, en utilisant le fait que $m_l \leq m_{l+1}$:

$$\begin{aligned}
F_{l+1,u} &\geq F_{l+1} + \frac{1}{m_l} \log \mathbf{E}[W_{l+1} \dots W_k U | \mathcal{F}^B_{v_l}] \\
\exp m_l F_{l+1,u} &\geq \mathbf{E}[W_{l+1} \dots W_k U | \mathcal{F}^B_{v_{l+1}}] \exp m_l F_{l+1} \\
&= V_l \mathbf{E}[W_{l+1} \dots W_k U | \mathcal{F}^B_{v_{l+1}}] \exp m_l F_l \\
&= \mathbf{E}[W_l \dots W_k U | \mathcal{F}^B_{v_{l+1}}] \exp m_l F_l
\end{aligned}$$

En conditionnant par rapport à $\mathcal{F}^B_{v_l}$ et en prenant le logarithme, on obtient le résultat annoncé. Soit, en $l = 0$,

$$\log \mathbf{E}[W_1 \dots W_k U | \mathcal{F}^B_{v_1}] \leq m_1 (F_{1,u} - F_1),$$

soit, en prenant l'espérance :

$$\mathbf{E} \log \mathbf{E}[W_1 \dots W_k U | \mathcal{F}^B_{v_1}] \leq -\epsilon_2 m_1 N.$$

Comme $m_1 > 0$, le lemme découle d'un résultat de concentration de la mesure pour des v.a. gaussiennes. □

Remarque. on n'a pas utilisé l'optimalité en $\mathbf{m}^0$...

Conclusion

Nous avons ici repris la preuve donnée par M. Talagrand en la reformulant de manière plus analytique. Cependant, bien que cette démarche ait permis de confirmer la véracité de la conjecture de Parisi à haute température, elle ne nous a pas amenés à conclure dans le cas général.

Bibliographie

[1] P. Carmona, *High temperature Sherrington-Kirkpatrick model for general spins.*

[2] F. Guera, *Fluctuations and thermodynamic variables in mean field spin glass models.*

[3] M. Talagrand, *The Parisi formula.* Annals of Mathematics, to appear. Disponible sur la page web de l'auteur.