Le théorème de Wigner

Alain Camanes

14 février 2007

Ces notes d'exposé sont inspirées du cours de Saint-Flour d'A. Guionnet.

1 Calculs préliminaires

1.1 Nombres de Catalan

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note C_k le nombre d'arbres orientés à k arêtes.
En parcourant les noeuds de l'abre par ordre de filiation et de gauche à droite, on établit une bijection entre les arbres orientés à k noeuds et les marches aléatoires de longueur $2k$ issues de 0, restant positives et finissant en 0.

Lemme 1.1. *Pour tout $k \in \mathbb{N}$,*

$$C_k = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

Or, on a d'après le principe de réflexion (3^{eme} ligne)

$$\begin{aligned}
C_k &= \sharp\left\{0 \xrightarrow[\geq 0]{2n\ pas} 0\right\} \\
&= \sharp\left\{1 \xrightarrow{2n-1\ pas} 0\right\} - \sharp\left\{1 \xrightarrow[coupent\ (Ox)]{2n-1\ pas} 0\right\} \\
&= \sharp\left\{1 \xrightarrow{2n-1\ pas} 0\right\} - \sharp\left\{1 \xrightarrow{2n-1\ pas} -2\right\} \\
&= \sharp\left\{1 \xrightarrow{2n-1\ pas} 0\right\} - \sharp\left\{0 \xrightarrow{2n-1\ pas} -3\right\} \\
&= \binom{2n-1}{n} - \binom{2n-1}{n-2} \\
&= \frac{(2n-1)!}{(n!)^2}\left\{n - \frac{n(n-1)}{n+1}\right\} \\
&= \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.
\end{aligned}$$

1.2 Loi du demi-cercle

On appelle loi du demi-cercle la loi

$$d\sigma(x) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{4-x^2}\mathbb{1}_{|x|\leq 2}\ dx.$$

Lemme 1.2. *Pour tout $k \in \mathbb{N}$, en notant $m_k = \int_{\mathbb{R}} x^k \, d\sigma(x)$, on a*

$$\begin{aligned} m_{2k+1} &= 0, \\ m_{2k} &= C_k. \end{aligned}$$

Démonstration. D'une part, d'après le changement de variable $x = 2\sin\theta$,

$$\begin{aligned} m_{2k} &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{4^k \sin^{2k}\theta}{\pi} 2\cos^2\theta \, d\theta \\ &= \frac{2\cdot 4^k}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^{2k}\theta \, d\theta - \frac{2\cdot 2^k}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^{2k+2}\theta \, d\theta. \end{aligned}$$

D'autre part, en effectuant une intégration par parties après le changement de variable précédent,

$$m_{2k} = \frac{4^k}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin^{2k+1}\theta}{2k+1} \sin\theta \, d\theta.$$

Finalement, on obtient la relation de récurrence

$$m_{2k} = 4(2k-1)m_{2k-2} - (2k+1)m_{2k},$$

ce qui permet d'obtenir

$$m_{2k} = \frac{4(2k-1)}{2k+2} m_{2k-2} = C_k.$$

□

2 Le théorème de Wigner

2.1 L'énoncé

On considère une matrice carrée $X \in \mathcal{M}_N(\mathbb{C})$ telle que $X^\star = X$, (X_{ij}) sont des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées, $\mathbb{E}[X_{ij}] = 0$, $\mathbb{E}[|X_{ij}|^2] = 1/N$.
On suppose que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\sup_{N\in\mathbb{N}} \sup_{i,j} \mathbb{E}\left[|\sqrt{N} X_{ij}\right] \leq C(k) < +\infty.$$

On définit la mesure empirique des valeurs propres,

$$L_X = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \delta_{\lambda_i},$$

où les λ_i sont les N valeurs propres (réelles) de la matrice X.

Théorème 2.1. *Pour toute fonction continue bornée f,*

$$\lim_{N\to+\infty} \int f(x) \, dL_X(x) = \int f(x) \, d\sigma(x) \ p.s.$$

Remarque. La première intégrale peut s'écrire sous la forme

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} f(\lambda_i).$$

2.2 Schéma de la preuve

- Montrer le résultat pour tout polynôme
  - ▶ Montrer un résultat de convergence en moyenne vers les nombres de Catalan
$$\frac{1}{N}tr(X^k) \to C_k \mathbb{1}_{2\mathbb{N}}(k).$$
  - ▶ Utiliser Tchebycheff + Borel-Cantelli pour montrer un résultat p.s.
- Appliquer le théorème de Weierstrass à f sur un intervalle $(-B, B)$ avec $B > 2$
  - ▶ Utiliser la compacité du support de σ.
  - ▶ Hypothèse sur les moments de X.

Nous nous intéresserons dans ces notes qu'à une petite partie de la preuve, i.e.

$$\frac{1}{N}tr(X^k) \to C_k \mathbb{1}_{2\mathbb{N}}(k).$$

3 Démonstration

3.1 Réécriture

Soit $Y = \sqrt{N}X$. On développe la formule de la trace d'une matrice pour obtenir,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\frac{1}{N}tr(X^k)\right] &= \mathbb{E}\left[N^{-k/2-1}tr(Y^k)\right] \\ &= \sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{N} \frac{1}{N^{k/2+1}} \underbrace{\mathbb{E}\left[Y_{i_1 i_2} Y_{i_2 i_3} \dots Y_{i_k i_1}\right]}_{P(i)}.\end{aligned}$$

Remarque. • Compte-tenu de l'indépendance des entrées de la matrice ainsi que de leur centrage, si une des entrées diffère de toutes les autres, $P(i)$ sera nul. Formellement, s'il existe m tel que $\forall l \in \{1, \dots, k\}$ différent de m, $\{i_l, i_{l+1}\} \neq \{i_m, i_{m+1}\}$, alors $P(i) = 0$.
- Chaque terme de la somme induit un graphe dont les sommets sont donnés par les composantes du vecteur i.

L'objectif est ici de comprendre quels sont les $P(i)$ qui ont le plus de poids dans la somme, et même de montrer que ce sont ceux qui induisent un arbre comme graphe !

3.2 Graphes

En utilisant le vecteur i, on construit un graphe $G(i)$ tel que
- i_1 est la racine
- $S(i) = \{i_1, \dots, i_k\}$
- $A(i) = \{i_1 \to i_2, \dots, i_k \to i_1\}$ (arêtes non orientées)

On définit alors le squelette de $G(i)$ noté $\widetilde{G}(i)$ de telle façon que
- i_1 est la racine
- $S(i) = \{i_1, \dots, i_k\}$
- $\widetilde{A}(i)$ est obtenu en supprimant les arêtes (non orientées) redondantes

Lemme 3.1. *Pour tout vecteur i,*

$$|S(i)| \leq |\widetilde{A}(i)| + 1,$$

avec égalité si et seulement si $\widetilde{G}$ est un arbre.

Démonstration. On effectue une récurrence sur $|S(i)|$.
- Si $|S(i)| = 1$, $|\widetilde{A}(i)|$ vaut soit 0 soit 1.
- On efface la racine de $\widetilde{G}(i)$ et les l arêtes issues de cette racine. On obtient ainsi un ensemble de graphes connexes $\{\widetilde{G}_1, \ldots, \widetilde{G}_r\}$.
  Ces graphes satisfont les relations

$$\left\{ \begin{array}{lcl} |S(i)| - 1 & = & \sum_{j=1}^{r} |S_j|, \\ |\widetilde{A}(i)| - l & = & \sum_{j=1}^{r} |A_j|. \end{array} \right.$$

  On obtient ainsi d'après l'hypothèse de récurrence,

$$\begin{array}{rcl} |S(i)| - 1 & \leq & \displaystyle\sum_{j=1}^{r} (|A_j| + 1) \\ & = & |\widetilde{A}(i)| + \underbrace{r - l}_{\leq 0} \\ & \leq & |\widetilde{A}(i)|. \end{array}$$

  Le cas d'égalité dans le calcul précédent a lieu si et seulement si $r = l$ et ainsi on a autant de composante connexe que d'arêtes issues de la racine, ce qui implique (par récurrence) qu'on est en présence d'un arbre.

□

3.3 Conclusion

Nous avons remarqué précédemment que si $P(i) \neq 0$, toute arête est répétée au moins deux fois. On a ainsi

$$|\widetilde{A}(i)| \leq \frac{1}{2}|A(i)| = \frac{k}{2}.$$

On obtient ainsi pour le nombre de sommets,

$$\begin{array}{rcl} |S(i)| & \leq & |\widetilde{A}(i)| + 1 \\ & \leq & \left[\dfrac{k}{2}\right] + 1. \end{array}$$

Il y a ainsi au plus $n^{\left[\frac{k}{2}\right]+1}$ termes dans la somme intervenant dans le théorème.
- Si k est impair,

$$\begin{array}{rcl} n^{-k/2-1} \displaystyle\sum_i P(i) & \leq & n^{-k/2-1} n^{[k/2]+1} B_k \\ & = & n^{[k/2]-k/2} B_k \\ & \to & 0, \end{array}$$

  ce qui conclut une partie du théorème !

- Si k est pair, on étudie deux cas distincts.
  - ► Si $|S(i)| < k/2+1$, comme précédemment on a

$$n^{-k/2-1} \sum_{i;|S(i)|<k/2+1} P(i) \longrightarrow 0.$$

  - ► Sinon, $|S(i)| = k/2+1$ et ainsi $\widetilde{G}(i)$ est un arbre à $k/2$ arêtes. Chaque arête apparaît donc exactement deux fois dans G et on a ainsi,

$$P(i) = \prod \mathbb{E}\left[Y^2_{i_p i_{p+1}}\right] = 1.$$

  Finalement,

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} tr(X^k) &\rightarrow \sharp\{i; |S(i)| = k/2+1\} \\ &= \sharp\{\text{arbres à } k/2 \text{ arêtes}\} \\ &= C_k. \end{aligned}$$

La partie du théorème qu'on étudiait est ainsi démontrée.