Planches à clous

CE1
45’

Recherche de parcours eulériens

Prérequis

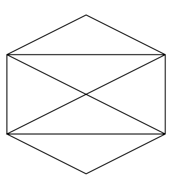
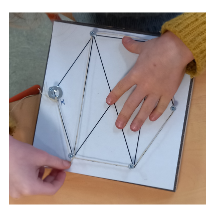
* Matériel : Planches et fiches de graphes. Possibilité d’effectuer les essais avec un crayon ou avec une feuille cartonnée sur laquelle sont disposées des attaches parisiennes ?

Apports

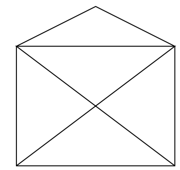
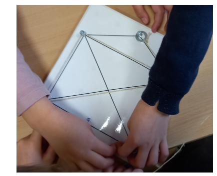
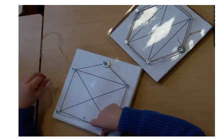
* Recherche de solutions, Coopération pour la recherche.
* Démarche pour être sûr qu’une solution ne peut exister.

Déroulé

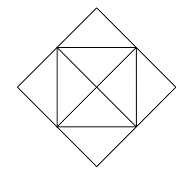
1. Présentation du problème. Un facteur décide de distribuer son courrier en passant une et une seule fois dans chaque rue. Peut-il trouver un tel chemin ?
   On explique comment positionner la rondelle métallique sur une des vis pour choisir le sommet de départ puis comment on déroule la ficelle pour construire le chemin.
2. Commencer par la forme de double enveloppe pour laquelle on peut trouver un chemin en partant de n’importe quel sommet.
   Objectif : Remarquer que les symétries assurent qu’il suffit de commencer par le sommet du haut et par celui en haut à gauche du rectangle (par exemple). On peut également remarquer que, si un chemin existe, on peut partir de n’importe quel sommet.

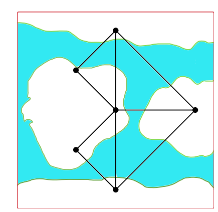
3. Continuer par la forme d’enveloppe. Ici, il existe un chemin uniquement si on part du sommet en bas à gauche et qu’on termine en bas à droite (ou inversement).
   Objectif : Rechercher systématiquement un chemin en partant des autres sommets pour constater l’absence de solution. Ne pas prévenir les élèves qu’il se peut qu’il n’y ait pas de solution engendre pour voir émerger des débats dans le groupe.

4. Terminer avec la forme en étoile pour laquelle il n’existe aucun chemin satisfaisant.



5. On termine avec le contexte historique. Leonhard Euler a introduit la notion de graphe en 1735 pour résoudre le problème des 7 ponts de Konigsberg. Au milieu de la ville de Konigsberg coule un fleuve (le Pregel) au milieu dequel sont situées deux îles. Au total, 7 ponts relient les îles entre elles et les îles aux berges. Est-il possible d’effectuer une promenade dans cette ville en ne passant qu’une et une seule fois sur chacun de ces ponts ?



   Réponse : Il n’existe pas de solution !
6. Pour aller plus loin, on peut constater que, si un chemin existe et qu’il arrive et part d’un même sommet, alors la ficelle, si elle entre sur un sommet, elle doit en sortir. Le nombre d’arêtes en chaque sommet doit donc être un nombre pair.

Contexte scientifique

* Le problème des 7 ponts de Konigsberg : Wikipedia
* La caractérisation des graphes eulériens, c’est-à-dire des graphes pour lesquels un tel parcours est possible.
* Fiche sur le facteur eulérien de l’IREM de Grenoble.

A. Camanes