III - Intégrale sur un segment

I - Primitives

Définition 1 - Primitive

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Une *primitive* de f est une fonction dérivable F sur I telle que, pour tout $x \in [a, b]$, $F'(x) = f(x)$.

Exemple 1

- Soit $F(x) = x\ln(x) - x$ définie sur $]0, +\infty[$. Comme la fonction logarithme népérien est dérivable sur $]0, +\infty[$, alors F est dérivable et pour tout $x \in]0, +\infty[$,
$$F'(x) = \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} - 1 = \ln(x).$$
Ainsi, F est une primitive de ln sur $]0, +\infty[$.
- Soit $F(x) = \frac{x^3}{12} + 4x^2 + 1$ définie sur $\mathbb{R}$. La fonction F est dérivable et pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$F'(x) = 3\frac{x^2}{12} + 4 \times 2x + 0 = \frac{x^2}{4} + 8x.$$
Ainsi, F est une primitive de la fonction définie pour tout x réel par $f(x) = \frac{x^2}{4} + 8x$.

Théorème 1 - Primitives de fonctions continues

Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives. Si F et G sont des primitives d'une fonction f continue sur I, alors il existe un réel c tel que $\forall\, x \in I,\ F(x) = G(x) + c$.

Proposition 1 - Primitives des fonctions usuelles

Fonction f	Primitive F
$c,\ c \in \mathbb{R}$	cx
$x^a,\ a \neq -1$	$\frac{1}{a+1}x^{a+1}$
$\frac{1}{x}$	$\ln(x)$
$e^{ax},\ a \neq 0$	$\frac{1}{a}\,e^{ax}$

Exemple 2

- Soit $f(x) = x^5$. Une primitive de f est la fonction définie pour tout x réel par
$$F(x) = \frac{1}{5+1}x^{5+1} = \frac{x^6}{6}.$$
- Soit $f(x) = e^{3x}$. Une primitive de f est la fonction définie pour tout x réel par
$$F(x) = \frac{1}{3}\,e^{3x}.$$
- Soit $f(x) = \frac{1}{x^5} = x^{-5}$. Une primitive de f est la fonction définie pour tout $x \neq 0$ par
$$F(x) = \frac{1}{-5+1}x^{-5+1} = -\frac{x^{-4}}{4} = -\frac{1}{4x^4}.$$

Proposition 2 - Primitive de fonctions composées

Soit u une fonction dérivable telle que u' soit continue.

Fonction f	Primitive F
$\lambda u'(x)$	$\lambda u(x)$
$u'(x)+v'(x)$	$u(x)+v(x)$
$u'(x)u^a(x)$, $a\neq -1$	$\frac{1}{a+1}u^{a+1}(x)$
$\frac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln\lvert u(x)\rvert$
$u'(x)\,\mathrm{e}^{u(x)}$	$\mathrm{e}^{u(x)}$

Exemple 3

- Soit $f(x)=\frac{1}{3x}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{x}$. Une primitive de f est la fonction définie pour tout $x>0$ par
$$F(x)=\frac{1}{3}\times\ln(x)=\frac{\ln(x)}{3}.$$
- Soit $f(x)=\mathrm{e}^{2x}+\sqrt{x}$. Une primitive de $x\mapsto\mathrm{e}^{2x}$ est $x\mapsto\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}$. Comme $\sqrt{x}=x^{1/2}$, une primitive de $v(x)=\sqrt{x}$ est
$$V(x)=\frac{1}{\frac{1}{2}+1}x^{1/2+1}=\frac{1}{\frac{3}{2}}x^{3/2}=\frac{2x^{3/2}}{3}.$$
Ainsi, une primitive de f est la fonction définie pour tout $x>0$ par
$$F(x)=\frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}+\frac{2x^{3/2}}{3}.$$
- Soit $f(x)=\frac{1}{x}\ln(x)$. En notant $u(x)=\ln(x)$, alors f est de la forme $f(x)=u'(x)u(x)$. Ainsi, une primitive de f est la fonction définie pour tout $x>0$ par
$$F(x)=\frac{1}{1+1}(\ln(x))^{1+1}=\frac{(\ln x)^2}{2}.$$
- Soit $f(x)=\frac{1}{x}\ln^4(x)$. En notant $u(x)=\ln(x)$, alors f est de la forme $f(x)=u'(x)u^4(x)$. Ainsi, une primitive de f est la fonction définie pour tout $x>0$ par
$$F(x)=\frac{1}{4+1}(\ln(x))^{4+1}=\frac{(\ln x)^5}{5}.$$
- Soit $f(x)=\frac{2x+1}{x^2+x}$. En notant $u(x)=x^2+x$, alors f est de la forme $f(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}$. Ainsi, une primitive de f est la fonction définie par
$$F(x)=\ln\left|x^2+x\right|.$$
- Soit $f(x)=\frac{x+1}{x^2+2x}$. En notant $u(x)=x^2+2x$, alors $u'(x)=2x+2=2(x+1)$. Ainsi,
$$f(x)=\frac{1}{2}\times\frac{2(x+1)}{x^2+2x}$$
et une primitive de F est la fonction définie par
$$F(x)=\frac{1}{2}\ln\left|x^2+2x\right|.$$
- Soit $f(x)=(3x^2+4)\,\mathrm{e}^{x^3+4x}$. En posant $u(x)=x^3+4x$, alors f est de la forme $f(x)=u'(x)\,\mathrm{e}^{u(x)}$. Ainsi, une primitive de f est la fonction déinie par
$$F(x)=\mathrm{e}^{x^3+4x}.$$

II - Intégrale d'une fonction continue

Définition 2 - Intégrale d'une fonction continue

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et F une primitive de f. L'intégrale de f sur $[a,b]$ est le réel défini par

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Exemple 4

En utilisant les primitives usuelles,

- $\displaystyle\int_1^2 x^4\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^5}{5}\right]_1^2 = \frac{2^5}{5} - \frac{1}{5} = \frac{31}{5}$.
- $\displaystyle\int_0^1 x^3\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1^4}{4} - \frac{0^4}{4} = \frac{1}{4}$.
- $\displaystyle\int_3^4 \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\right]_3^4 = \frac{\mathrm{e}^{2\times 4}\,2 - \mathrm{e}^{2\times 3}}{2} = \frac{\mathrm{e}^8 - \mathrm{e}^6}{2}$.
- $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = [\ln(x)]_1^2 = \ln(2) - \ln(1) = \ln(2)$.
- $\displaystyle\int_0^1 (3x^2+4)\,\mathrm{e}^{x^3+4x}\,\mathrm{d}x = \left[\mathrm{e}^{x^3+4x}\right]_0^1 = \mathrm{e}^5 - 1$.
- En utilisant les primitives des fonctions puissances,

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x^4}\,\mathrm{d}x &= \int_{-2}^{-1} x^{-4}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{-4+1}{x}^{-4+1}\right]_{-2}^{-1}\\ &= \left[-\frac{1}{3x^3}\right]_{-2}^{-1} = -\frac{1}{3(-1)^3} + \frac{1}{3(-2)^3}\\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{3\times 8} = \frac{1}{3}\left[1 - \frac{1}{8}\right]\\ &= \frac{7}{24}.\end{aligned}$$

Théorème 2 - Intégrale et Primitive

Soit f une fonction continue sur I et $a \in I$. La fonction $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f qui s'annule en a. En particulier, pour tout réel $x > a$, $F'(x) = f(x)$.

Exemple 5

Soit F la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $F(x) = \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$. La fonction F est dérivable et $F'(x) = \mathrm{e}^x$. Ainsi, F' est positive et F est croissante.

Proposition 3 - Interprétation géométrique

Si f est à valeurs positives, $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est égale à l'aire du domaine compris entre l'axe des abscisses, la courbe représentative de f et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.

III - Propriétés de l'intégrale

Proposition 4 - Relation de Chasles

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a, b et c des réels de I. Alors,

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Exemple 6

Soit f la fonction définie par $f(x) = 0$ si $x \leqslant 1$ et $f(x) = x - 1$ sinon. Alors,

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \int_{-1}^{1} 0\,\mathrm{d}x + \int_{1}^{2} (x-1)\,\mathrm{d}x\\ &= 0 + \left[\frac{(x-1)^2}{2}\right]_1^2\\ &= 0 + \frac{1}{2} - 0\\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Proposition 5 - Linéarité de l'intégrale

Soit f, g des fonctions continues sur $[a,b]$ et α, β des réels. Alors,

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Exemple 7

En utilisant les primitives usuelles,

$$\begin{aligned}\int_1^2 \left(\frac{12}{x} + 5x^3\right)\,\mathrm{d}x &= 12\int_1^2 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x + 5\int_1^2 x^3\,\mathrm{d}x\\ &= 12\,[\ln(x)]_1^2 + 5\left[\frac{x^4}{4}\right]_1^2\\ &= 12\,(\ln(2) - \ln(1)) + 5\left(\frac{2^4}{4} - \frac{1}{4}\right)\\ &= 12\ln(2) + \frac{5}{4}\cdot 15.\end{aligned}$$

Proposition 6 - Croissance de l'intégrale (I)

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$. Si $a \leqslant b$ et, pour tout $x \in [a,b]$, $f(x) \geqslant 0$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$.

Exemple 8

Soit $F(x) = \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$ et $0 \leqslant x \leqslant y$. D'après la relation de Chasles,

$$F(y) = \int_0^y \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \int_0^x \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t + \int_x^y \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = F(x) + \int_x^y \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t.$$

Or, $\mathrm{e}^t \geqslant 0$ pour tout $t \in [x,y]$ et $x \leqslant y$, donc $\displaystyle\int_x^y \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t \geqslant 0$. Ainsi, $F(x) \leqslant F(y)$ et F est croissante.

Proposition 7 - Croissance de l'intégrale (II)

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$. Si, pour tout $x \in [a,b]$, $f(x) \leqslant g(x)$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

Exemple 9

Pour tout n entier naturel, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
I_{n+1} - I_n &= \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left(\frac{x^{n+1}}{1+x} - \frac{x^n}{1+x}\right)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \frac{x^{n+1} - x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \underbrace{(x-1)}_{\leqslant 0} \underbrace{\frac{x^n}{1+x}}_{\geqslant 0}\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Comme $0 \leqslant 1$, les bornes de l'intégrale sont bien ordonnées. Comme la fonction intégrée est négative, alors $I_{n+1} - I_n \leqslant 0$, soit $I_{n+1} \leqslant I_n$.
La suite (I_n) est donc décroissante.

Théorème 3 - Intégration par parties

Soit u et v deux fonctions dérivables sur $[a,b]$ telles que u' et v' soient continues sur $[a,b]$. Alors,

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x.$$

Exemple 10 -

- Calculons $\int_1^2 x\,\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$.

  Posons $u(x) = x$ et $v'(x) = \mathrm{e}^{2x}$. Alors, $u'(x) = 1$ et $v(x) = \frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}$. Comme u, v sont dérivables et u', v' sont continues sur $[1,2]$, d'après la formule d'intégration par parties,

$$\begin{aligned}
\int_1^2 x\,\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x &= \left[x\frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2\,\mathrm{e}^4}{2} - \frac{\mathrm{e}^2}{2} - \left[\frac{\mathrm{e}^{2x}}{4}\right]_1^2 \\
&= \mathrm{e}^4 - \frac{\mathrm{e}^2}{2} - \frac{\mathrm{e}^4}{4} + \frac{\mathrm{e}^2}{4} \\
&= \frac{3\,\mathrm{e}^4}{4} - \frac{\mathrm{e}^2}{4}.
\end{aligned}$$

- Calculons $\int_1^2 \ln(x)\,\mathrm{d}x$.

  Posons $u(x) = \ln(x)$ et $v'(x) = 1$. Alors, $u'(x) = \frac{1}{x}$ et $v(x) = x$. Comme u, v sont dérivables et u', v' sont continues sur $[1,2]$, d'après la formule d'intégration par parties,

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \ln(x)\,\mathrm{d}x &= [\ln(x)x]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{x}\cdot x\,\mathrm{d}x \\
&= 2\ln(2) - 1\ln(1) - \int_1^2 1\,\mathrm{d}x \\
&= 2\ln(2) - [x]_1^2 \\
&= 2\ln(2) - 2 + 1 \\
&= 2\ln(2) - 1.
\end{aligned}$$