

VI - Calculs de sommes

Séries numériques

I - Calculs de sommes

I.1 - Généralités

Définition 1 - Le symbole \sum

Le symbole \sum permet de désigner la somme des termes d'une suite de réels. Ainsi, si $(u_k)_{p \leq k \leq n}$ est une suite de réels,

$$\sum_{k=p}^n u_k = u_p + u_{p+1} + \cdots + u_{n-1} + u_n.$$

On prononce *somme pour k variant de p à n des u_k*.

Exemple 1 - Quelques sommes

- Si $u_k = 2$ pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, alors

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n u_k &= u_1 + \cdots + u_n \\ &= \underbrace{2 + \cdots + 2}_{n \text{ termes}} = 2n. \end{aligned}$$

- Si $v_k = 3$ pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, alors

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n v_k &= v_0 + \cdots + v_n \\ &= \underbrace{3 + \cdots + 3}_{n+1 \text{ termes}} = 3(n+1). \end{aligned}$$

- Si $w_k = k$ pour tout $k \in \llbracket 0, 5 \rrbracket$, alors

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^5 w_k &= w_0 + \cdots + w_5 \\ &= 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 \\ &= 15. \end{aligned}$$

Proposition 1 - Somme de termes constants

Soit $a \in \mathbb{R}$.

- $\sum_{k=1}^n a = n \times a$,
- $\sum_{k=0}^n a = (n+1) \times a$,
- $\sum_{k=p}^n a = (n-p+1) \times a$.

Exemple 2

- $\sum_{k=3}^7 2 = (7-3+1) \times 2 = 10$.
- $\sum_{k=1}^{12} e = (12-1+1) \times e = 12e$.
- Soit n un entier naturel. $\sum_{k=0}^n n = (n+1-1)n = n^2$.

Proposition 2

Soit $(u_k)_{1 \leq k \leq n+1}$ une suite de réels. Alors,

$$\sum_{k=0}^{n+1} u_k = \left(\sum_{k=0}^n u_k \right) + u_{n+1}.$$

Proposition 3 - Sommes classiques

Soit $q \neq 1$. On prouve par récurrence que :

- $\sum_{k=0}^n k = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$
- $\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$
- $\sum_{k=p}^n q^k = q^p \times \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}.$

Exemple 3 - Sommes classiques

- $\sum_{k=0}^{100} k = \frac{100 \times (100+1)}{2} = 50 \times 101 = 5050.$
- $\sum_{k=0}^{12} k = \frac{12 \times (12+1)}{2} = 6 \times 13 = 78.$
- $\sum_{k=0}^{10} 2^k = \frac{1-2^{10+1}}{1-2} = 2^{11} - 1.$
- $\sum_{k=3}^{12} 3^k = 3^3 \times \frac{1-3^{12-3+1}}{1-3} = 3^3 \times \frac{3^{10} - 1}{2}.$
- $\sum_{k=0}^{100} \frac{1}{2^k} = \sum_{k=0}^{100} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{101}}{1-\frac{1}{2}} = 2 \left(1 - \frac{1}{2^{101}}\right).$

Proposition 4 - Linéarité de la somme

Soit $(u_k)_{p \leq k \leq n}$, $(v_k)_{p \leq k \leq n}$ deux suites de réels et α un réel.

$$\sum_{k=p}^n (\alpha \times u_k + v_k) = \alpha \sum_{k=p}^n u_k + \sum_{k=p}^n v_k.$$

Exemple 4 - Un calcul de somme

Calculons

$$\begin{aligned} \sum_{k=3}^{10} \left(2 + \frac{3}{5^k}\right) &= \sum_{k=3}^{10} 2 + \sum_{k=3}^{10} \left(3 \times \frac{1}{5^k}\right) \\ &= 2(10 - 3 + 1) + 3 \times \sum_{k=3}^{10} \left(\frac{1}{5}\right)^k \\ &= 2 \times 8 + 3 \times \left(\frac{1}{5}\right)^3 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{10-3+1}}{1 - \frac{1}{5}} \\ &= 16 + \frac{3}{5^3} \times \frac{1 - \frac{1}{5^8}}{\frac{4}{5}} = 16 + \frac{3}{5^3} \times \frac{5}{4} \times (1 - 5^{-8}) \\ &= 16 + \frac{3}{100} (1 - 5^{-8}). \end{aligned}$$

I.2 - Deux méthodes de calcul

Proposition 5 - Somme télescopique

Soit $(u_k)_{p \leq k \leq n+1}$ une suite de réels. Alors,

$$\sum_{k=p}^n (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_p$$

et

$$\sum_{k=p}^n (u_k - u_{k+1}) = u_p - u_{n+1}.$$

Exemple 5 - Deux sommes télescopiques

- Lorsque $p = 0$ et $n = 4$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^4 (u_{k+1} - u_k) &= (u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) + (u_3 - u_2) + \dots \\ &\quad \dots + (u_4 - u_3) + (u_5 - u_4) \\ &= u_5 - u_0. \end{aligned}$$

- On remarque que $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= - \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k} \right) \\ &= - \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{1} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

En particulier, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = 1$.

Proposition 6 - Changement d'indice

Soit $(u_k)_{0 \leq k \leq n+1}$ une suite de réels.

- $\sum_{k=p}^{k=n} u_{k-1} = \sum_{k-1=p-1}^{k-1=n-1} u_{k-1} = \sum_{\ell=p-1}^{\ell=n-1} u_{\ell}$.
- $\sum_{k=p}^{k=n} u_{k+1} = \sum_{k+1=p+1}^{k+1=n+1} u_{k+1} = \sum_{\ell=p+1}^{\ell=n+1} u_{\ell}$.

Exemple 6 - Un changement d'indice

On admet que, pour tout n entier naturel, $\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
Alors,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n (k+1)^2 &= \sum_{k+1=1}^{k+1=n+1} (k+1)^2 = \sum_{\ell=1}^{n+1} \ell^2 \\ &= \sum_{\ell=0}^{n+1} \ell^2 - 0^2 = \frac{(n+1)(n+1+1)(2(n+1)+1)}{6} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}. \end{aligned}$$

II - Séries numériques

Définition 2 - Série

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels. Pour tout n entier naturel, on pose

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_n.$$

- La suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la *série de terme général* u_n .
- Le réel $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ est la *somme partielle* d'ordre n .

On note $\sum u_n$ la suite $\left(\sum_{k=0}^n u_k \right)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exemple 7 - Des sommes partielles

- La somme partielle d'ordre 100 de la série de terme général $\frac{1}{n}$ est :

$$S_{100} = \sum_{k=1}^{100} \frac{1}{k}.$$

- La somme partielle d'ordre 10 de la série de terme général $\frac{1}{2^n}$ est :

$$S_{10} = \sum_{k=0}^{10} \frac{1}{2^k} = 2 \left(1 - \frac{1}{2^{11}} \right).$$

II.1 - Nature des séries

Définition 3 - Série convergente, Série divergente

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels.

- Si $\left(\sum_{k=0}^n u_k \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente, alors la série de terme général u_n converge. Sinon, la série de terme général u_n diverge.
- Si la série de terme général u_n converge, la limite de $\left(\sum_{k=0}^n u_k \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est la somme de cette série. On note

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n u_k.$$

Exemple 8 - Une série convergente / Une série divergente

- On a vu que pour tout n entier naturel non nul,

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$. Donc la série de terme général

ral $\frac{1}{k(k+1)}$ converge et

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1.$$

- Soit $\sum u_n$ la série de terme général 4^n . Alors,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n 4^k &= \frac{1 - 4^{n+1}}{1 - 4} \\ &= 3(4^{n+1} - 1) \\ &\rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Ainsi, la série de terme général 4^n diverge.

Théorème 1 - Condition nécessaire de convergence

- Si la série de terme général u_n converge, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.
- Si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0, alors la série de terme général u_n diverge.

Exemple 9 - Divergence grossière

- Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2+1}{n} = +\infty$, alors la série de terme général $\frac{n^2+1}{n}$ diverge.
- Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n^2-n+1}{2n(n+1)} = \frac{3}{2}$, alors la série de terme général $\frac{3n^2-n+1}{2n(n+1)}$ diverge.

II.2 - Série géométrique

Théorème 2 - Série géométrique

- Si $q \in]-1, 1[$, alors la série de terme général q^n converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

- Si $q \geq 1$ ou $q \leq -1$, alors la série de terme général q^n diverge.

Exemple 10 - Une série géométrique

Soit $\sum u_n$ la série de terme général $\frac{1}{2^n}$. Alors,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} &= \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= 2 \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}} \right) \\ &\rightarrow 2. \end{aligned}$$

Ainsi, $\sum \frac{1}{2^n}$ converge et sa somme vaut $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = 2$.

III - 3 exemples de raisonnements

Théorème 3 - Une série de Riemann [H.P.]

$$\sum \frac{1}{k^2} \text{ converge.}$$

Exemple 11

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$.

- Montrons que $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante. D'après les propriétés de la somme,

$$\begin{aligned} S_{n+1} - S_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(n+1)^2} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \\ &= \frac{1}{(n+1)^2} \geq 0. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $n \geq 1$, $S_{n+1} \geq S_n$ et (S_n) est croissante.

- En utilisant un changement de variable,

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k^2} \\ &= \sum_{k-1=0}^{k-1=n-1} \frac{1}{(k-1+1)^2} \\ &= \sum_{\ell=0}^{\ell=n-1} \frac{1}{(\ell+1)^2} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k+1)^2}. \end{aligned}$$

- Montrons que (S_n) est majorée.

$$\begin{aligned}
 k &\leq k+1 \\
 \frac{1}{k+1} &\leq \frac{1}{k} \\
 \frac{1}{(k+1)^2} &\leq \frac{1}{k(k+1)} \\
 \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+1)^2} &\leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)} \\
 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k+1)^2} - 1 &\leq \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\
 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} - 1 &\leq 1 - \frac{1}{n} \\
 S_n &\leq 1 - \frac{1}{n} + 1 \\
 &\leq 2.
 \end{aligned}$$

Ainsi, (S_n) est majorée par 2.

- Finalement, (S_n) est croissante et majorée donc convergente et $\sum \frac{1}{k^2}$ converge. On peut montrer que sa somme vaut $\frac{\pi^2}{6}$.

Théorème 4 - Série exponentielle [H.P.]

$$\sum \frac{1}{k!} \text{ converge.}$$

Exemple 12

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $T_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$.

- D'après les propriétés de la somme,

$$\begin{aligned}
 T_{n+1} - T_n &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \\
 &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + \frac{1}{(n+1)!} - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \\
 &= \frac{1}{(n+1)!} \geq 0.
 \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $n \geq 0$, $T_{n+1} \geq T_n$ et (T_n) est croissante.

- De plus, pour tout $k \geq 2$,

$$\begin{aligned}
 k &\geq 2 \\
 k(k-1)(k-2)\cdots 2 &\geq 2 \times 2 \times 2 \times \cdots \times 2 \\
 k! &\geq 2^{k-1} \\
 \frac{1}{k!} &\leq \frac{1}{2^{k-1}} \\
 \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} &\leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{2^{k-1}} \\
 T_n - 2 &\leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^{k-1}} \\
 T_n &\leq \sum_{\ell=1}^{n-1} \frac{1}{2^\ell} + 2 \\
 &\leq \frac{1}{2} \times \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} + 2 \\
 &\leq 1 - \frac{1}{2^n} + 2 \\
 &\leq 3.
 \end{aligned}$$

Donc (T_n) est majorée par 3.

- Ainsi, (T_n) est croissante et majorée donc convergente. On peut montrer que sa limite vaut e^1 . On peut généraliser ce résultat en montrant que pour tout réel x , la série $\sum \frac{x^k}{k!}$ converge et sa somme vaut e^x .

Théorème 5 - Série géométrique dérivée [H.P.]

Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < 1$. Alors,

$$\sum kx^{k-1} \text{ converge.}$$

Exemple 13

On considère la fonction définie sur $] -1, 1[$ par $f_n(x) = \sum_{k=0}^n x^k$.

La fonction f_n est dérivable et $f'_n(x) = \sum_{k=1}^n kx^{k-1}$.

Or, $f_n(x) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$.

Ainsi,

$$f'_n(x) = \frac{-(n+1)x^n(1-x) - (1-x^{n+1})(-1)}{(1-x)^2}$$

Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1)x^n = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} x^{n+1} = 0$. Ainsi,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f'_n(x) = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Donc $\sum kx^{k-1}$ converge et

$$\sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$