X - Variables aléatoires à densité

Révisions

- Intégrales généralisées.
- Variables aléatoires discrètes.

I - Variable aléatoire à densité

I.1 - Densité

Définition 1 - Densité de probabilité

Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une *densité de probabilité* si :
- f est à valeurs positives sur $\mathbb{R}$,
- f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points en lesquels elle admet des limites finies à droite et à gauche,
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$.

Exemple 1 - Densités

- Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } x \in [1,3] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

  ⋆ f est à valeurs positives.

  ⋆ D'après les théorèmes généraux, f est continue $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 1 et en 3.
  Comme $\displaystyle\lim_{t\to 1^-} f(t) = 0$ et $\displaystyle\lim_{t\to 1^+} f(t) = \frac{1}{2}$, alors f admet des limites finies à droite et à gauche en 1.
  Comme $\displaystyle\lim_{t\to 3^-} f(t) = \frac{1}{2}$ et $\displaystyle\lim_{t\to 3^+} f(t) = 0$, alors f admet des limites finies à droite et à gauche en 3.

  ⋆ $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^3 \frac{\mathrm{d}t}{2} = \frac{1}{2}(3-1) = 1$.

  Ainsi, f est une densité de probabilité.

- Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2\,\mathrm{e}^{-2x} & \text{sinon} \end{cases}$$

  ⋆ g est à valeurs positives car la fonction exponentielle est à valeurs positives.

  ⋆ D'après les théorèmes généraux, g est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0.
  Comme $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} g(x) = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} g(x) = 1$, alors g admet des limites finies à gauche et à droite en 1.

  ⋆ Soit $x > 0$. Alors,

$$\int_{-\infty}^{x} g(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x 2\,\mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t = \left[-\,\mathrm{e}^{-2t}\right]_0^x = -\,\mathrm{e}^{-2x} + 1.$$

  Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-2x} = 0$, alors $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ converge et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t = 1$.

  Ainsi, g est une densité de probabilité.

Définition 2 - Variable aléatoire à densité

La variable aléatoire réelle X admet une *densité de probabilité* f si, pour tout x réel, sa fonction de répartition F_X est égale à :

$$F_X(x) = \mathbf{P}\left([X \leqslant x]\right) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exemple 2 - Calcul de fonction de répartition

Soit X une variable aléatoire de densité g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2\,\mathrm{e}^{-2x} & \text{sinon} \end{cases}$$

La fonction de répartition de X est égale à

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} g(t)\,\mathrm{d}t.$$

- Si $x < 0$, alors $F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0\,\mathrm{d}t = 0$.
- Si $x \geqslant 0$, alors

$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{x} 2\,\mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t = \left[-\mathrm{e}^{-2t}\right]_0^x = 1 - \mathrm{e}^{-2x}.$$

Ainsi,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0, \\ 1 - \mathrm{e}^{-2x} & \text{si } x \geqslant 0. \end{cases}$$

Proposition 1 - Fonction de répartition & Densité

Si X est une variable aléatoire à densité de fonction de répartition F et de densité f, alors, en tout point x où F est dérivable, $f(x) = F'(x)$.

I.2 - Calculs

Proposition 2 - Calculs de probabilités

Soient X une variable aléatoire admettant une densité de probabilité f, une fonction de répartition F et $a < b$ deux réels.

Alors,

$$\mathbf{P}(X < a) = \mathbf{P}(X \leqslant a),$$
$$\mathbf{P}(a \leqslant X \leqslant b) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a),$$
$$\mathbf{P}(X \geqslant a) = 1 - \mathbf{P}(X \leqslant a) = 1 - F(a).$$

Exemple 3 - Du continu au discret

Soit X une variable aléatoire de densité f définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin [0,1] \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Ainsi, la fonction de répartition F de X vaut :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}.$$

On note Y la variable aléatoire définie par :

- $Y = 0$ si $X < \frac{1}{2}$,
- $Y = 1$ si $X \in \left[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right]$,
- $Y = 2$ si $X > \frac{2}{3}$.

Ainsi, $Y(\Omega) = \{0, 1, 2\}$ et

$$\mathbf{P}([Y=0]) = \mathbf{P}\left(\left[X < \frac{1}{2}\right]\right) = F(1/2) = \frac{1}{2},$$
$$\mathbf{P}([Y=1]) = \mathbf{P}\left(\left[\frac{1}{2} \leqslant X \leqslant \frac{2}{3}\right]\right) = F(2/3) - F(1/2)$$
$$= \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6},$$
$$\mathbf{P}([Y=2]) = \mathbf{P}\left(\left[X > \frac{2}{3}\right]\right) = 1 - F(2/3)$$
$$= 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

Ainsi, la loi de Y est résumée dans le tableau suivant :

y	0	1	2
$\mathbf{P}([Y=y])$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$

Définition 3 - Espérance

La variable aléatoire X de densité f admet une *espérance* si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t\times f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Alors,

$$\mathbf{E}[X]=\int_{-\infty}^{+\infty} t\times f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exemple 4 - Un calcul d'espérance

Soit X une variable aléatoire de densité f définie par

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<0\\ 2\,\mathrm{e}^{-2x} & \text{si } x\geqslant 0\end{cases}$$

Soit $x>0$. On pose $\begin{cases}u(t) &= t\\ u'(t) &= 1\end{cases}$ et $\begin{cases}v'(t) &= 2\,\mathrm{e}^{-2t}\\ v(t) &= -\,\mathrm{e}^{-2t}\end{cases}$. Les fonctions u et v sont dérivables et de dérivées continues sur $[0,x]$. D'après la formule d'intégration par parties,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{x} tf(t)\,\mathrm{d}t &= \int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}t+\int_0^x t\times 2\,\mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t\\ &= \left[-t\,\mathrm{e}^{-2t}\right]_0^x-\int_0^x 1\times(-\,\mathrm{e}^{-2t})\,\mathrm{d}t\\ &= -x\,\mathrm{e}^{-2x}+\left[-\frac{\mathrm{e}^{-2t}}{2}\right]_0^x\\ &= -x\,\mathrm{e}^{-2x}-\frac{\mathrm{e}^{-2x}}{2}+\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

D'après le théorème des croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} x\,\mathrm{e}^{-2x}=0$.

Ainsi, $\int_{-\infty}^{+\infty} t\,\mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t$ converge et $\mathbf{E}[X]=\frac{1}{2}$.

Définition 4 - Variance

La variable aléatoire X de densité f admet une *variance* si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Alors, $\mathbf{E}\left[X^2\right]=\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\,\mathrm{d}t$ et

$$\mathbf{V}(X)=\mathbf{E}\left[X^2\right]-\mathbf{E}[X]^2.$$

L'*écart-type* de X est défini par $\sigma(X)=\sqrt{\mathbf{V}(X)}$.

Exemple 5 - Un calcul de variance

Soit X une variable aléatoire de densité f définie par

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<0\\ 2\,\mathrm{e}^{-2x} & \text{si } x\geqslant 0\end{cases}$$

Nous avons vu précédemment que $\mathbf{E}[X]=\int_0^{+\infty} 2\,\mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}$.

Soit $x>0$. On pose $\begin{cases}u(t) &= t^2\\ u'(t) &= 2t\end{cases}$ et $\begin{cases}v'(t) &= 2\,\mathrm{e}^{-2t}\\ v(t) &= -\,\mathrm{e}^{-2t}\end{cases}$. Les fonctions u et v sont dérivables et de dérivées continues sur $[0,x]$. D'après la formule d'intégration par parties,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{x} t^2 f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^x t^2 2\,\mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t=\left[-t^2\,\mathrm{e}^{-2t}\right]_0^x-\int_0^x 2t(-\,\mathrm{e}^{-2t})\,\mathrm{d}t\\ &= -x^2\,\mathrm{e}^{-2x}+\int_0^x t\left(2\,\mathrm{e}^{-2t}\right)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\int_{-\infty}^{x} t^2 f(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty} t2\,\mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}.$$

Ainsi, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2\,\mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t$ converge et $\mathbf{E}\left[X^2\right] = \frac{1}{2}$. Alors,

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}\left[X^2\right] - \mathbf{E}[X]^2 = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Proposition 3 - Propriétés de l'espérance et de la variance

Soient a, b deux réels et X, Y des variables aléatoires à densité admettant une espérance. Alors,

$$\mathbf{E}[aX+b] = a\mathbf{E}[X] + b$$
$$\mathbf{E}[aX+bY] = a\mathbf{E}[X] + b\mathbf{E}[Y].$$

Si X admet une variance, alors $\mathbf{V}(aX+b) = a^2\mathbf{V}(X)$.
Si X et Y sont indépendantes, alors

$$\mathbf{E}[XY] = \mathbf{E}[X]\,\mathbf{E}[Y] \quad\text{et}\quad \mathbf{V}(X+Y) = \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y).$$

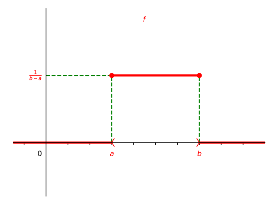
II - Lois usuelles

II.1 - Loi uniforme sur $[a,b]$

Définition 5 - Loi uniforme

Soient $a < b$. La variable aléatoire X suit la *loi uniforme* sur $[a,b]$, noté $X \hookrightarrow \mathscr{U}([a,b])$, si elle admet la densité

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a,b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



Loi uniforme

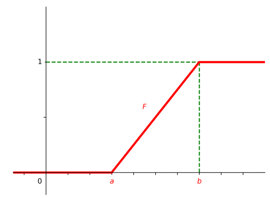
La loi uniforme permet de modéliser le choix d'un réel au hasard entre a et b sans privilégier aucun des résultats.

Proposition 4 - Propriétés de la loi uniforme

Soient $a < b$ et X qui suit une loi uniforme sur $[a,b]$.

- La fonction de répartition F de X est définie par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } x \in [a,b] \\ 1 & \text{si } x \geqslant b \end{cases}$$



- L'espérance de X est $\mathbf{E}[X] = \frac{a+b}{2}$.
- La variance de X est $\mathbf{V}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$.

Exemple 6 - Modifications d'une loi uniforme

Soit $X \hookrightarrow \mathscr{U}([1,2])$.

- On pose $Y = \frac{X-1}{2}$. La fonction de répartition de Y est égale à :

$$F_Y(y) = \mathbf{P}([Y \leqslant y]) = \mathbf{P}\left(\left[\frac{X-1}{2} \leqslant y\right]\right) = \mathbf{P}([X \leqslant 2y+1]).$$

Ainsi,

⋆ Si $2y+1 \leqslant 1$, i.e. $y \leqslant 0$, alors $F_Y(y) = 0$.

⋆ Si $1 \leqslant 2y+1 \leqslant 2$, i.e. $y \in [0, 1/2]$, alors

$$F_Y(y) = \frac{2y+1-1}{2-1} = 2y.$$

⋆ Si $2y+1 \geqslant 2$, i.e. $y \geqslant 1/2$, alors $F_Y(y) = 1$.

La fonction F_Y est dérivable sauf en 1 et en 2. Une densité de Y est donc donnée par :

$$f_Y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 2 & \text{si } t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ 0 & \text{si } t > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Finalement, $Y \hookrightarrow \mathscr{U}([0, 1/2])$.

- On pose $Z = X^2$. La fonction de répartition de z vaut

$$F_Z(z) = \mathbf{P}([Z \leqslant z]) = \mathbf{P}\left([X^2 \leqslant z]\right).$$

⋆ Si $z < 0$, alors $[X^2 \leqslant z]$ est impossible et $F_Z(z) = 0$.

⋆ Si $z \geqslant 0$, alors

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= \mathbf{P}\left([|X| \leqslant \sqrt{z}]\right) = \mathbf{P}\left([-\sqrt{z} \leqslant X \leqslant \sqrt{z}]\right) \\ &= F_X(\sqrt{z}) - F_X(-\sqrt{z}) = F_X(\sqrt{z}). \end{aligned}$$

Ainsi,

— Si $\sqrt{z} \leqslant 1$, i.e. $z \leqslant 1$, alors $F_Z(z) = 0$.

— Si $\sqrt{z} \geqslant 2$, i.e. $z \geqslant 4$, alors $F_Z(z) = 1$.

— Si $\sqrt{z} \in [1, 2]$, i.e. $z \in [1, 4]$, alors

$$F_Z(z) = \frac{\sqrt{z}-1}{2-1} = \sqrt{z} - 1.$$

La fonction F_Z est dérivable sauf en 1 et en 4. Une densité de Z est donnée par :

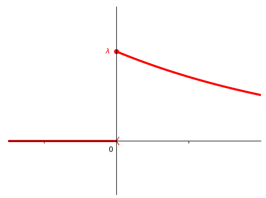
$$f_Z(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z < 1 \\ \frac{1}{2\sqrt{z}} & \text{si } z \in [1, 4] \\ 0 & \text{si } z > 4 \end{cases}$$

II.2 - Loi exponentielle

Définition 6 - Loi exponentielle

Soit $\lambda > 0$. La variable aléatoire X suit la *loi exponentielle* de paramètre λ, noté $X \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda)$, si elle admet la densité

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$



Loi exponentielle

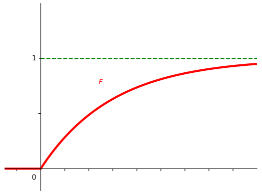
La loi exponentielle modélise la durée de vie d'un phénomène sans mémoire ou sans vieillissement d'usure. Il est utilisé pour modéliser la durée de vie d'un atome radioactif, le temps d'attente dans une file, la durée de vie d'un composant électronique,. . .

Proposition 5 - Propriétés de la loi exponentielle

Soient $\lambda > 0$ et X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ.

- La fonction de répartition F de X est définie par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$



- L'espérance de X est $\mathbf{E}[X] = \frac{1}{\lambda}$.
- La variance de X est $\mathbf{V}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$.

Exemple 7 - Minimum de lois exponentielles

Soient $X \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda)$ et $Y \hookrightarrow \mathscr{E}(\mu)$ deux variables aléatoires indépendantes. On note $Z = \min\{X, Y\}$. Alors, la fonction de répartition de Z est égale à :

$$\begin{aligned} F_Z(z) = \mathbf{P}([Z \leqslant z]) &= 1 - \mathbf{P}([\min\{X, Y\} > z]) \\ &= 1 - \mathbf{P}([X > z] \cap [Y > z]) \\ &= 1 - \mathbf{P}([X > z]) \times \mathbf{P}([Y > z]) \\ &= 1 - (1 - \mathbf{P}([X \leqslant z])) \times (1 - \mathbf{P}([Y \leqslant z])). \end{aligned}$$

- Si $z \leqslant 0$, alors $F_Z(z) = 0$.
- Si $z > 0$, alors

$$F_Z(z) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda z} \times \mathrm{e}^{-\mu z} = 1 - \mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)z}.$$

La fonction F_Z est dérivable sauf en 0. Une densité de Z est donnée par :

$$f_Z(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z < 0 \\ (\lambda + \mu)\,\mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)z} & \text{si } z \geqslant 0 \end{cases}$$

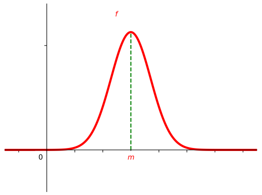
Finalement, $Z \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda + \mu)$.

II.3 - Loi normale

Définition 7 - Loi normale

Soient m un réel et σ un réel strictement positif. La variable aléatoire X suit la *loi normale* (ou de Laplace-Gauss) de paramètres m et σ^2, noté $X \hookrightarrow \mathscr{N}(m, \sigma^2)$, si elle admet la densité

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}.$$



Loi normale

La loi normale sert à modéliser des expériences qui sont le résultat de multiples facteurs. Par exemple, la taille d'individus de même âge, la taille des becs d'une population d'oiseaux, les résultats d'une mesure physique, les variations du prix de denrées côtées en bourse,...

Proposition 6 - Propriétés de la loi normale

Soient $m \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ et X qui suit une loi normale de paramètres m et σ^2.

- L'espérance de X est $\mathbf{E}[X] = m$.
- La variance de X est $\mathbf{V}(X) = \sigma^2$.

Définition 8 - Loi normale centrée réduite

La variable aléatoire à densité X suit la *loi normale centrée réduite* si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$. La fonction de répartition d'une loi normale centrée réduite est généralement notée Φ.

Exemple 8 - Lecture de table

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$. On utilise la table de la loi normale centrée réduite :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}([X \leqslant 2{,}57]) &\simeq 0{,}9949\\ \mathbf{P}([X \leqslant 1{,}45]) &\simeq 0{,}9265\\ \mathbf{P}([0,25 \leqslant X \leqslant 1{,}45]) &= \mathbf{P}([X \leqslant 1{,}45]) - \mathbf{P}([X \leqslant 0{,}25])\\ &\simeq 0{,}9265 - 0{,}5987 \simeq 0{,}3278.\end{aligned}$$

Proposition 7 - Fonction de répartition

Soit Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite. Alors,

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \Phi(-x) = 1 - \Phi(x).$$

Exemple 9 - Utilisation de la table

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$. D'après la table,

$$\mathbf{P}([X \leqslant -2{,}34]) = 1 - \mathbf{P}([X \leqslant 2{,}34]) \simeq 1 - 0{,}9904 \simeq 0{,}0096.$$

Proposition 8 - Lien entre lois normales

Soient $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$. Si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m,\sigma^2)$ et $X^* = \frac{X-m}{\sigma}$, alors $X^* \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$.

Exemple 10 - Utilisation de la table

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(3,25)$. Alors, $\frac{X-3}{5} \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$, soit

$$\begin{aligned}\mathbf{P}([X \leqslant 2]) = \mathbf{P}([X-3 \leqslant 2-3]) &= \mathbf{P}\left(\left[\frac{X-3}{5} \leqslant -\frac{1}{5}\right]\right)\\ &= \mathbf{P}\left(\left[\tfrac{X-3}{5} \leqslant -0{,}2\right]\right) = 1 - \mathbf{P}\left(\left[\tfrac{X-3}{5} \leqslant 0{,}2\right]\right)\\ &\simeq 1 - 0{,}5793 \simeq 0{,}4207.\end{aligned}$$

II.4 - Table de la loi normale centrée réduite

z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5	0,5034	0,5080	0,5120	0,5159	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5909	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7356	0,7389	0,7421	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734	0,7764	0,7793	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8437	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8906	0,8925	0,8943	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9648	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,980	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9874	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9924	0,9927	0,9929	0,9930	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,996	0,9957	0,9958	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,997	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986