III - Récurrences

À Savoir

Le raisonnement par récurrence se déroule en 3 étapes principales.

- $*$ On énonce clairement la propriété à démontrer. Cette propriété doit dépendre d'un entier naturel noté n.
- $*$ **L'initialisation.** On montre la propriété lorsque $n = 0$ (si la propriété est vraie pour tout entier naturel) ou lorsque $n = 1$ (si la propriété est vraie pour tout entier naturel non nul).

  Généralement, la propriété est une égalité. On montre alors que les deux membres de l'égalité sont égaux à une même valeur.
- $*$ **L'hérédité.** On fixe un entier naturel n. On suppose la propriété vraie à l'ordre n (c'est l'hypothèse de récurrence). On montre que la propriété est vraie lorsque n est remplacé par $(n+1)$ (ne pas oublier le parenthésage).

  Généralement, on part d'un côté de l'égalité et on arrive à l'autre côté. Une des étapes du calcul utilise l'hypothèse de récurrence.
- $*$ **Conclusion.** On conclut clairement en citant l'initialisation, l'hérédité et le principe de récurrence.

I - Calculs de sommes

Exemple 1 - Somme des n premiers entiers non nuls

Montrons par récurrence que, pour tout n entier naturel,

$$0 + 1 + 2 + \cdots + n = \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

On note P_n : $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Initialisation. Lorsque $n = 0$. Montrons que $\sum_{k=0}^{0} k = \frac{0(0+1)}{2}$. Or,

$$\sum_{k=0}^{0} k = 0$$

$$\frac{0(0+1)}{2} = 0$$

Ainsi, P_0 est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$. Montrons que $\sum_{k=0}^{n+1} k = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$. Or,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} k &= 0+1+2+\cdots+n+(n+1)\\ &= [0+1+\cdots+n]+(n+1), \quad \text{d'après les propriétés des sommes}\\ &= \frac{n(n+1)}{2}+(n+1), \quad \text{d'après l'hypothèse de récurrence}\\ &= \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}\\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2}.\end{aligned}$$

Ainsi, P_{n+1} est vraie.
Conclusion. Finalement, la propriété est vraie à l'ordre 0 et est héréditaire. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout n entier naturel, soit

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Exemple 2 - Somme des termes d'une suite géométrique

Soit $q \neq 1$. Montrons par récurrence que, pour tout n entier naturel,

$$q^0+q^1+q^2+\cdots+q^n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

On note P_n : $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Initialisation. Lorsque $n=0$. Montrons que $\sum_{k=0}^{0} q^k = \frac{1-q^{0+1}}{1-q}$. Or,

$$\sum_{k=0}^{0} q^k = q^0 = 1$$
$$\frac{1-q^{0+1}}{1-q} = \frac{1-q}{1-q} = 1$$

Ainsi, P_0 est vraie.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$. Montrons que $\sum_{k=0}^{n+1} q^k = \frac{1-q^{(n+1)+1}}{1-q} = \frac{1-q^{n+2}}{1-q}$. Or,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} q^k &= q^0+q^1+q^2+\cdots+q^n+q^{n+1}\\ &= \left[q^0+q^1+\cdots+q^n\right]+q^{n+1}, \quad \text{d'après les propriétés des sommes}\\ &= \frac{1-q^{n+1}}{1-q}+q^{n+1}, \quad \text{d'après l'hypothèse de récurrence}\\ &= \frac{1-q^{n+1}+(1-q)q^{n+1}}{1-q}\\ &= \frac{1-q^{n+1}+q^{n+1}-\overbrace{q\cdot q^{n+1}}_{q^{n+2}}}{1-q}\\ &= \frac{1-q^{n+2}}{1-q}\end{aligned}$$

Ainsi, P_{n+1} est vraie.
Conclusion. Finalement, la propriété est vraie à l'ordre 0 et est héréditaire. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout n entier naturel, soit

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Exercice 1. (Somme des n premiers carrés) Montrer par récurrence que, pour tout n entier naturel,

$$0^2 + 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Exercice 2. (Somme des n premiers cubes) Montrer par récurrence que, pour tout n entier naturel,

$$0^3 + 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \sum_{k=0}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$$

Exercice 3. (Formule du binôme de Newton,) Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

II - Inégalités

Exemple 3 - Inégalité de Bernoulli

Soit $x > 0$. Montrons que, pour tout $n \geqslant 0$, $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$.

On note $P_n : (1+x)^n \geqslant 1 + nx$.
Initialisation. Lorsque $n = 0$. Montrons que $(1+x)^0 \geqslant 1 + 0x$. Or,

$$\begin{aligned} (1+x)^0 &= 1 \\ 1 + 0x &= 1. \end{aligned}$$

Ainsi, la propriété P_0 est vraie.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $(1+x)^n \geqslant 1+nx$. Montrons que $(1+x)^{n+1} \geqslant 1 + (n+1)x$. En effet,

$$\begin{aligned} (1+x)^{n+1} &= (1+x)^n \times (1+x), && \text{d'après la définition des puissances} \\ &\geqslant (1+nx) \times (1+x), && \text{d'après l'hypothèse de récurrence} \\ &\geqslant 1 + x + nx + nx^2 \\ &\geqslant 1 + (n+1)x + nx^2 \\ &\geqslant 1 + (n+1)x, && \text{car } nx^2 \geqslant 0 \end{aligned}$$

Ainsi, P_{n+1} est vraie.
Conclusion. Finalement, la propriété est vraie à l'ordre 0 et est héréditaire. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout n entier naturel, soit

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ (1+x)^n \geqslant 1 + nx.$$

Exemple 4 - Suite & Encadrement

Soit (u_n) définie par $u_0 = 3$ et, pour tout n entier naturel, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 15}$. Montrer que, pour tout n entier naturel, $0 \leqslant u_n \leqslant 5$.

On note $P_n : 0 \leqslant u_n \leqslant 5$.
Initialisation. Lorsque $n = 0$. Montrons que $0 \leqslant u_0 \leqslant 5$.
$u_0 = 3 \in [0, 5]$, donc P_0 est vraie.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $0 \leqslant u_n \leqslant 5$. Montrons que $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 5$. En effet,

$$\begin{aligned} 0 \leqslant u_n &\leqslant 5, && \text{d'après l'hypothèse de récurrence} \\ 15 \leqslant u_n + 15 &\leqslant 20 \\ \sqrt{15} \leqslant \sqrt{u_n + 15} &\leqslant \sqrt{20}, && \text{la fonction racine étant croissante} \\ 0 \leqslant \sqrt{15} \leqslant \sqrt{u_n + 15} &\leqslant \sqrt{20} \leqslant \sqrt{25}, && \text{car } 20 \leqslant 25 \\ 0 \leqslant u_{n+1} &\leqslant 5, && \text{d'après la définition de } u_{n+1} \end{aligned}$$

Ainsi, P_{n+1} est vraie.
Conclusion. Finalement, la propriété est vraie à l'ordre 0 et est héréditaire. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour

tout n entier naturel, soit

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\, 0 \leqslant u_n \leqslant 5.$$

Exercice 4. (Suite & Encadrement) Soit (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout n entier naturel, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6}$. Montrer que, pour tout n entier naturel, $u_n \leqslant 3$.

Exercice 5. (Suite & Encadrement) Soit (u_n) définie par $u_0 = 6$ et, pour tout n entier naturel, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 15}$. Montrer que, pour tout n entier naturel, $4 \leqslant u_n \leqslant 10$.

III - Suites définies par récurrence

Exercice 6. (Suite & Terme général) Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 5$ et, pour tout n entier naturel, $u_{n+1} = u_n + 3$. Montrer que, pour tout n entier naturel, $u_n = 5 + 3n$.

Exercice 7. (Suite géométrique) Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 3$ et, pour tout n entier naturel, $u_{n+1} = 5 \times u_n$. Montrer que, pour tout n entier naturel, $u_n = 3 \times 5^n$.

Exercice 8. (Suite & Terme général) Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et, pour tout n entier naturel, $u_{n+1} = u_n + n + 1$. Montrer que, pour tout n entier naturel, $u_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Exercice 9. (Suite & Terme général) Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 3$ et, pour tout n entier naturel, $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n^2}$. Montrer que, pour tout n entier naturel, $u_n = \sqrt{n + 9}$.

Exercice 10. (Suite & Terme général) Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et, pour tout n entier naturel, $u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n + 1}$. Montrer que, pour tout n entier naturel non nul, $u_n = \frac{2}{2n+1}$.