

VI - Primitives Stratégie

Lors du calcul de primitives, il est important d'appliquer une stratégie de calculs pour *reconnaître* la formule à utiliser. Nous présentons et illustrons ces règles ci-dessous, de la plus élémentaire à la plus élaborée. Plutôt que d'écrire « Une primitive de la fonction $f(x) = \dots$ est la fonction $F(x) = \dots$ », nous adopterons la notation **non standard** $f(x) \rightsquigarrow F(x)$.

I - Fonctions élémentaires

À Savoir

$$\begin{array}{lcl} \text{fonction} & \rightsquigarrow & \text{primitive} \\ c \in \mathbb{R}, c & \rightsquigarrow & cx \end{array}$$

Exemple 1

$$3 \rightsquigarrow 3x$$

À Savoir

$$\begin{array}{lcl} \text{fonction} & \rightsquigarrow & \text{primitive} \\ n \neq -1, x^n & \rightsquigarrow & \frac{x^{n+1}}{n+1} \end{array}$$

Exemple 2

$$\begin{array}{lcl} x & \rightsquigarrow & \frac{x^2}{2} \\ x^2 & \rightsquigarrow & \frac{x^3}{3} \\ \sqrt{x} = x^{1/2} & \rightsquigarrow & \frac{1}{1/2+1} x^{1/2+1} = \frac{2}{3} x^{3/2} \\ x^{1/3} & \rightsquigarrow & \frac{1}{1/3+1} x^{1/3+1} = \frac{3}{4} x^{4/3} \\ \frac{1}{x^2} = x^{-2} & \rightsquigarrow & \frac{1}{-2+1} x^{-2+1} = -\frac{1}{x} \\ \frac{1}{x^3} = x^{-3} & \rightsquigarrow & \frac{1}{-3+1} x^{-3+1} = -\frac{2}{x^2} \\ \frac{1}{x^{1/3}} = x^{-1/3} & \rightsquigarrow & \frac{1}{-1/3+1} x^{-1/3+1} = \frac{3x^{2/3}}{2} \end{array}$$

À Savoir

$$\begin{array}{lcl} \text{fonction} & \rightsquigarrow & \text{primitive} \\ \frac{1}{x} & \rightsquigarrow & \ln(x) \end{array}$$

À Savoir

$$\begin{array}{lcl} \text{fonction} & \rightsquigarrow & \text{primitive} \\ a \neq 0, e^{ax} & \rightsquigarrow & \frac{1}{a} e^{ax} \end{array}$$

Exemple 3

$$\begin{array}{lcl} e^x & \rightsquigarrow & e^x \\ e^{3x} & \rightsquigarrow & \frac{1}{3} e^{3x} \end{array}$$

II - Fonctions composées

À Savoir

$$\begin{array}{lcl} \text{fonction} & \rightsquigarrow & \text{primitive} \\ \lambda u'(x) & \rightsquigarrow & \lambda u(x) \end{array}$$

Exemple 4

$$\begin{array}{lcl} \frac{1}{3}x^2 & \rightsquigarrow & \frac{1}{3} \times \frac{x^3}{3} = \frac{x^3}{9} \\ 3x^{1/2} & \rightsquigarrow & 3 \times \frac{2x^{3/2}}{3} = 2x^{3/2} \end{array}$$

À Savoir

$$\begin{array}{lcl} \text{fonction} & \rightsquigarrow & \text{primitive} \\ u'(x) + v'(x) & \rightsquigarrow & u(x) + v(x) \end{array}$$

Exemple 5

$$\begin{array}{lcl} x^4 + x^5 & \rightsquigarrow & \frac{x^5}{5} + \frac{x^6}{6} \\ e^{3x} + \frac{1}{x} & \rightsquigarrow & \frac{e^{3x}}{3} + \ln(x) \end{array}$$

À Savoir

$$\begin{array}{lcl} \text{fonction} & \rightsquigarrow & \text{primitive} \\ \lambda u'(x) + \mu v'(x) & \rightsquigarrow & \lambda u(x) + \mu v(x) \end{array}$$

Exemple 6

$$\begin{array}{lcl} 3x - 2x^7 & \rightsquigarrow & 3 \times \frac{x^2}{2} - 2 \times \frac{x^8}{8} = \frac{3x^2}{2} - \frac{x^8}{4} \\ \frac{e^{3x}}{3} + \frac{2}{x} & \rightsquigarrow & \frac{1}{3} \times \frac{e^{3x}}{3} + 2 \ln(x) = \frac{e^{3x}}{9} + 2 \ln(x) \end{array}$$

À Savoir

$$\begin{array}{lcl} \text{fonction} & \rightsquigarrow & \text{primitive} \\ n \neq -1, u'(x)u^n(x) & \rightsquigarrow & \frac{1}{n+1}u^{n+1}(x) \end{array}$$

Exemple 7

$$\begin{array}{lcl} (x+2)^2 = \underbrace{1}_{u'(x)} \times \underbrace{(x+2)^2}_{u(x)} & \rightsquigarrow & \frac{1}{3}(x+2)^3 \\ \frac{1}{(x+3)^4} = \underbrace{1}_{u'(x)} \times \underbrace{(x+3)^{-4}}_{u(x)} & \rightsquigarrow & \frac{1}{-4+1}(x+3)^{-4+1} = -\frac{1}{3(x+3)^3} \\ \frac{2x}{(x^2+3)^4} = \underbrace{2x}_{u'(x)} \times \underbrace{(x^2+3)^{-4}}_{u(x)} & \rightsquigarrow & \frac{1}{4+1}(x^2+3)^{-5} = \frac{(x^2+3)^5}{5} \\ \frac{2x}{(x^2+3)^4} = \underbrace{2x}_{u'(x)} \times \underbrace{(x^2+3)^{-4}}_{u(x)} & \rightsquigarrow & \frac{-1}{-4+1}(x^2+3)^{-4+1} = -\frac{1}{3(x^2+3)^3} \\ \frac{(3x^2+2e^{2x})(x^3+e^{2x})^3}{(x^2+e^{3x})(x^3+e^{3x})^5} = \frac{1}{3+1}(x^3+e^{2x})^{3+1} = \frac{(x^3+e^{2x})^4}{4} & \rightsquigarrow & \\ (x^2+e^{3x})(x^3+e^{3x})^5 = \frac{1}{3} \underbrace{3(x^2+e^{3x})}_{u'(x)} \times \underbrace{(x^3+e^{3x})^5}_{u(x)} & \rightsquigarrow & \frac{1}{6}(x^3+e^{3x})^6 \end{array}$$

À Savoir

$$\begin{array}{lcl} \text{fonction} & \rightsquigarrow & \text{primitive} \\ \frac{u'(x)}{u(x)} & \rightsquigarrow & \ln |u(x)| \end{array}$$

Exemple 8

$$\begin{array}{lcl} \frac{1}{x+12} & \rightsquigarrow & \ln |x+12| \\ \frac{2x+3e^{3x}}{x^2+e^{3x}} & \rightsquigarrow & \ln(x^2+e^{3x}) \\ \frac{3x+e^{2x}}{3x^2+e^{2x}} = \frac{1}{2} \frac{\overbrace{2(3x^2+e^{2x})}^{u'(x)}}{\underbrace{3x^2+e^{2x}}_{u(x)}} & \rightsquigarrow & \frac{1}{2} \ln(3x^2+e^{2x}) \end{array}$$

À Savoir

$$\begin{array}{lcl} \text{fonction} & \rightsquigarrow & \text{primitive} \\ u'(x)e^{u(x)} & \rightsquigarrow & e^{u(x)} \end{array}$$

Exemple 9

$$\begin{aligned}
 e^{x+12} & \rightsquigarrow e^{x+12} \\
 (2x + 3e^{3x}) e^{x^2+e^{3x}} & \rightsquigarrow e^{x^2+e^{3x}} \\
 (3x+e^{2x}) e^{3x^2+e^{2x}} = \frac{1}{2} \left(\underbrace{2(3x^2 + e^{2x})}_{u'(x)} \right) e^{\underbrace{3x^2 + e^{2x}}_{u(x)}} & \rightsquigarrow \frac{1}{2} e^{3x^2+e^{2x}}
 \end{aligned}$$

À Savoir

Si la fonction est sous forme d'un **produit** $u(x)v'(x)$, on essaiera d'appliquer la formule d'intégration par parties. Si u et v deux fonctions dérivables et de dérivées continues sur $[a, b]$,

$$\int_a^b u(x)v'(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) dx.$$

Exemple 10

$$\begin{aligned}
 \int_1^x \underbrace{\ln(t)}_{u(t)} \cdot \underbrace{1}_{v'(t)} dt & \\
 = \left[\underbrace{\ln(t)}_{u(t)} \cdot \underbrace{t}_{v(t)} \right]_1^x - \int_1^x \underbrace{\frac{1}{t}}_{u'(t)} \underbrace{t}_{v(t)} dt & = x \ln(x) - (x - 1) \\
 \int_0^x \underbrace{t}_{u(t)} \underbrace{e^t}_{v'(t)} dt & \\
 = \left[\underbrace{t}_{u(t)} \cdot \underbrace{e^t}_{v(t)} \right]_0^x - \int_0^x \underbrace{1}_{u'(t)} \underbrace{e^t}_{v(t)} dt & = x e^x - (e^x - 1)
 \end{aligned}$$