VI - Primitives Stratégie

Lors du calcul de primitives, il est important d'appliquer une stratégie de calculs pour *reconnaître* la formule à utiliser. Nous présentons et illustrons ces règles ci-dessous, de la plus élémentaire à la plus élaborée. Plutôt que d'écrire « Une primitive de la fonction $f(x) = \cdots$ est la fonction $F(x) = \cdots$ », nous adopterons la notation **non standard** $f(x) \rightsquigarrow F(x)$.

I - Fonctions élémentaires

À Savoir

$$\begin{array}{ccc} \text{fonction} & \rightsquigarrow & \text{primitive} \\ c \in \mathbb{R},\ c & \rightsquigarrow & cx \end{array}$$

Exemple 1

$$3 \rightsquigarrow 3x$$

À Savoir

$$\begin{array}{ccc} \text{fonction} & \rightsquigarrow & \text{primitive} \\ n \neq -1,\ x^n & \rightsquigarrow & \frac{x^{n+1}}{n+1} \end{array}$$

Exemple 2

$$\begin{array}{lcl} x & \rightsquigarrow & \frac{x^2}{2} \\ x^2 & \rightsquigarrow & \frac{x^3}{3} \\ \sqrt{x} = x^{1/2} & \rightsquigarrow & \frac{1}{1/2+1}x^{1/2+1} = \frac{2}{3}x^{3/2} \\ x^{1/3} & \rightsquigarrow & \frac{1}{1/3+1}x^{1/3+1} = \frac{3}{4}x^{4/3} \\ \frac{1}{x^2} = x^{-2} & \rightsquigarrow & \frac{1}{-2+1}x^{-2+1} = -\frac{1}{x} \\ \frac{1}{x^3} = x^{-3} & \rightsquigarrow & \frac{1}{-3+1}x^{-3+1} = -\frac{2}{x^2} \\ \frac{1}{x^{1/3}} = x^{-1/3} & \rightsquigarrow & \frac{1}{-1/3+1}x^{-1/3+1} = \frac{3x^{2/3}}{2} \end{array}$$

À Savoir

$$\begin{array}{ccc} \text{fonction} & \rightsquigarrow & \text{primitive} \\ \frac{1}{x} & \rightsquigarrow & \ln(x) \end{array}$$

À Savoir

$$\begin{array}{ccc} \text{fonction} & \rightsquigarrow & \text{primitive} \\ a \neq 0,\ \mathrm{e}^{ax} & \rightsquigarrow & \frac{1}{a}\,\mathrm{e}^{ax} \end{array}$$

Exemple 3

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{e}^{x} & \rightsquigarrow & \mathrm{e}^{x} \\ \mathrm{e}^{3x} & \rightsquigarrow & \frac{1}{3}\,\mathrm{e}^{3x} \end{array}$$

II - Fonctions composées

À Savoir

fonction	$\rightsquigarrow$	primitive
$\lambda u'(x)$	$\rightsquigarrow$	$\lambda u(x)$

Exemple 4

$$\frac{1}{3}x^2 \rightsquigarrow \frac{1}{3}\times\frac{x^3}{3}=\frac{x^3}{9}$$

$$3x^{1/2} \rightsquigarrow 3\times\frac{2x^{3/2}}{3}=2x^{3/2}$$

À Savoir

fonction	$\rightsquigarrow$	primitive
$u'(x)+v'(x)$	$\rightsquigarrow$	$u(x)+v(x)$

Exemple 5

$$x^4+x^5 \rightsquigarrow \frac{x^5}{5}+\frac{x^6}{6}$$

$$\mathrm{e}^{3x}+\frac{1}{x} \rightsquigarrow \frac{\mathrm{e}^{3x}}{3}+\ln(x)$$

À Savoir

fonction	$\rightsquigarrow$	primitive
$\lambda u'(x)+\mu v'(x)$	$\rightsquigarrow$	$\lambda u(x)+\mu v(x)$

Exemple 6

$$3x-2x^7 \rightsquigarrow 3\times\frac{x^2}{2}-2\times\frac{x^8}{8}=\frac{3x^2}{2}-\frac{x^8}{4}$$

$$\frac{\mathrm{e}^{3x}}{3}+\frac{2}{x} \rightsquigarrow \frac{1}{3}\times\frac{\mathrm{e}^{3x}}{3}+2\ln(x)=\frac{\mathrm{e}^{3x}}{9}+2\ln(x)$$

À Savoir

fonction	$\rightsquigarrow$	primitive
$n\neq-1,\ u'(x)u^n(x)$	$\rightsquigarrow$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}(x)$

Exemple 7

$$(x+2)^2=\underbrace{1}_{u'(x)}\times(\underbrace{x+2}_{u(x)})^2 \rightsquigarrow \frac{1}{3}(x+2)^3$$

$$\frac{1}{(x+3)^4}=\underbrace{1}_{u'(x)}\times(\underbrace{x+3}_{u(x)})^{-4} \rightsquigarrow \frac{1}{-4+1}(x+3)^{-4+1}=-\frac{1}{3(x+3)^3}$$

$$\underbrace{2x}_{u'(x)}(\underbrace{x^2+3}_{u(x)})^4 \rightsquigarrow \frac{1}{4+1}(x^2+3)^5=\frac{(x^2+3)^5}{5}$$

$$\frac{2x}{(x^2+3)^4}=\underbrace{2x}_{u'(x)}(\underbrace{x^2+3}_{u(x)})^{-4} \rightsquigarrow \frac{1}{-4+1}(x^2+3)^{-4+1}=-\frac{1}{3(x^2+3)^3}$$

$$\underbrace{(3x^2+2\,\mathrm{e}^{2x})}_{u'(x)}(\underbrace{x^3+\mathrm{e}^{2x}}_{u(x)})^3 \rightsquigarrow \frac{1}{3+1}(x^3+\mathrm{e}^{2x})^{3+1}=\frac{(x^3+\mathrm{e}^{2x})^4}{4}$$

$$(x^2+\mathrm{e}^{3x})(x^3+\mathrm{e}^{3x})^5=\frac{1}{3}\underbrace{3(x^2+\mathrm{e}^{3x})}_{u'(x)}(\underbrace{x^3+\mathrm{e}^{3x}}_{u(x)})^5 \rightsquigarrow \frac{1}{6}(x^3+\mathrm{e}^{3x})^6$$

À Savoir

fonction	$\rightsquigarrow$	primitive
$\frac{u'(x)}{u(x)}$	$\rightsquigarrow$	$\ln\lvert u(x)\rvert$

Exemple 8

$$\frac{1}{x+12} \rightsquigarrow \ln|x+12|$$

$$\frac{2x+3\,\mathrm{e}^{3x}}{x^2+\mathrm{e}^{3x}} \rightsquigarrow \ln\left(x^2+\mathrm{e}^{3x}\right)$$

$$\frac{3x+\mathrm{e}^{2x}}{3x^2+\mathrm{e}^{2x}} = \frac{1}{2}\frac{\overbrace{2(3x^2+\mathrm{e}^{2x})}^{u'(x)}}{\underbrace{3x^2+\mathrm{e}^{2x}}_{u(x)}} \rightsquigarrow \frac{1}{2}\ln\left(3x^2+\mathrm{e}^{2x}\right)$$

À Savoir

fonction	$\rightsquigarrow$	primitive
$u'(x)\,\mathrm{e}^{u(x)}$	$\rightsquigarrow$	$\mathrm{e}^{u(x)}$

Exemple 9

$$\mathrm{e}^{x+12} \rightsquigarrow \mathrm{e}^{x+12}$$

$$\left(2x+3\,\mathrm{e}^{3x}\right)\mathrm{e}^{x^2+\mathrm{e}^{3x}} \rightsquigarrow \mathrm{e}^{x^2+\mathrm{e}^{3x}}$$

$$\left(3x+\mathrm{e}^{2x}\right)\mathrm{e}^{3x^2+\mathrm{e}^{2x}} = \frac{1}{2}\left(\underbrace{2(3x^2+\mathrm{e}^{2x})}_{u'(x)}\right)\mathrm{e}^{\underbrace{3x^2+\mathrm{e}^{2x}}_{u(x)}} \rightsquigarrow \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{3x^2+\mathrm{e}^{2x}}$$

À Savoir

Si la fonction est sous forme d'un **produit** $u(x)v'(x)$, on essaiera d'appliquer la formule d'intégration par parties. Si u et v sont deux fonctions dérivables et de dérivées continues sur $[a,b]$,

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x.$$

Exemple 10

$$\int_1^x \underbrace{\ln(t)}_{u(t)}\cdot\underbrace{1}_{v'(t)}\,\mathrm{d}t = \Big[\underbrace{\ln(t)}_{u(t)}\cdot\underbrace{t}_{v(t)}\Big]_1^x - \int_1^x \underbrace{\frac{1}{t}}_{u'(t)}\underbrace{t}_{v(t)}\,\mathrm{d}t = x\ln(x)-(x-1)$$

$$\int_0^x \underbrace{t}_{u(t)}\underbrace{\mathrm{e}^t}_{v'(t)}\,\mathrm{d}t = \Big[\underbrace{t}_{u(t)}\cdot\underbrace{\mathrm{e}^t}_{v(t)}\Big]_0^x - \int_0^x \underbrace{1}_{u'(t)}\underbrace{\mathrm{e}^t}_{v(t)}\,\mathrm{d}t = x\,\mathrm{e}^x-(\mathrm{e}^x-1)$$