IX - Suites numériques

I - Suites usuelles

À Savoir

La suite (u_n) est une suite arithmétique de raison r si

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + r.$$

Alors,

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 + nr.$$

Exemple 1 - Une suite arithmétique

Soit (u_n) telle que $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 3$. Alors, (u_n) est une suite arithmétique de raison 3. Ainsi,

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = 1 + 3n.$$

À Savoir

La suite (u_n) est une suite géométrique de raison q si

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = q \times u_n.$$

Alors,

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = q^n u_0.$$

Exemple 2 - Une suite géométrique

Soit (u_n) telle que $u_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n$. Alors, (u_n) est une suite arithmétique de raison 2. Ainsi,

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = 3 \times 2^n.$$

À Savoir

La suite (u_n) est une suite arithmético-géométrique si

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = q \times u_n + r.$$

Exemple 3 - Une suite arithmético-géométrique

L'étude d'une suite arithmético-géométrique suit toujours le schéma suivant.
Soit (u_n) telle que $u_0 = 7$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n + 3$.

* Recherche du réel ℓ tel que $\ell = 2\ell + 3$:

$$\begin{aligned} \ell &= 2\ell + 3 \\ 0 &= 2\ell - \ell + 3 \\ \ell &= -3. \end{aligned}$$

* Étude de la suite définie par $v_n = u_n - \ell$. Alors,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - \ell \\ &= (2u_n + 3) - (2\ell + 3) \\ &= 2u_n + 3 - 2\ell - 3 \\ &= 2(u_n - \ell) \\ &= 2v_n. \end{aligned}$$

  De plus, $v_0 = u_0 - \ell = 7 - (-3) = 10$.
  Ainsi, (v_n) est une suite géométrique de raison 2 et

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ v_n = 10 \times 2^n.$$

* Retour sur u_n. D'après la définition,

$$\begin{aligned} u_n - \ell &= v_n \\ u_n &= v_n + \ell \\ &= 10 \times 2^n - 3 = 5 \times 2^{n+1} - 3. \end{aligned}$$

II - Comportement des suites

À Savoir

Soit (u_n) une suite de nombres réels.

* La suite (u_n) est croissante si

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n \geqslant 0.$$

* La suite (u_n) est décroissante si

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n \leqslant 0.$$

Exemple 4 - Études de monotonie

* On définit $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ pour tout entier naturel n non nul.

  Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \frac{1}{n+1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \\ &= \frac{1}{n+1} \geqslant 0. \end{aligned}$$

  Ainsi, la suite (u_n) est croissante.

* Soit $t \in]0,1[$. On définit $v_n = \ln(1+t^n)$ pour tout entier naturel n.

  Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $t \in]0,1[$,

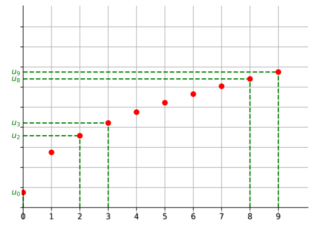
$$\begin{aligned} t &\leqslant 1 \\ t^n \times t &\leqslant t^n \times 1, \quad \text{car } t^n \geqslant 0 \\ 1 + t^{n+1} &\leqslant 1 + t^n \\ \ln(1+t^{n+1}) &\leqslant \ln(1+t^n), \quad \text{car } \ln \text{ est croissante} \\ v_{n+1} &\leqslant v_n \\ v_{n+1} - v_n &\leqslant 0. \end{aligned}$$

  Ainsi, la suite (v_n) est croissante.

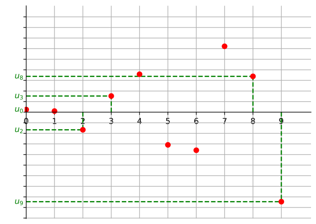
Attention ! Il convient de travailler avec un entier naturel n **quelconque**. Montrer que $u_1 - u_0 \geqslant 0$ ou $u_2 - u_1 \geqslant 0$ n'est d'aucune utilité pour étudier la monotonie d'une suite.

Exemple 5 - Représentations graphiques

Suite croissante.



Suite non monotone.



À Savoir

Soit (u_n) une suite de réels.

* La suite (u_n) est majorée s'il existe un réel M tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant M$.
* La suite (u_n) est minorée s'il existe un réel m tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant m$.

Exemple 6 - Étude de majorant

Soit $t \in]0,1[$. On définit $v_n = \ln(1+t^n)$ pour tout entier naturel n.

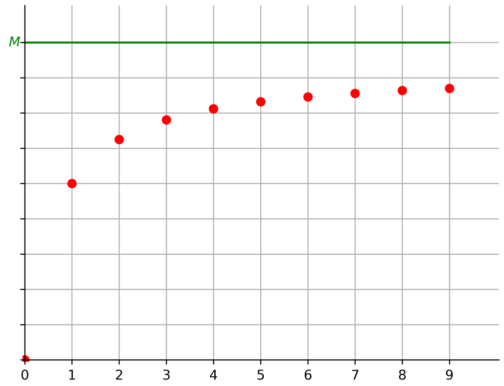
Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $t \in]0,1[$,

$$\begin{aligned} t &\leqslant 1 \\ t^n &\leqslant 1^n, \quad \text{car les puissances sont croissantes sur } \mathbb{R}_+ \\ 1+t^n &\leqslant 2 \\ \ln(1+t^n) &\leqslant \ln(2), \quad \text{car ln est croissante} \end{aligned}$$

Ainsi, la suite (v_n) est majorée par $\ln(2)$.

Attention ! Le minorant ou le majorant **ne** doit **pas** dépendre de l'indice n.

Exemple 7 - Représentation graphique



À Savoir

La suite (u_n) est convergente s'il existe un réel ℓ tel que $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$. Sinon, la suite (u_n) est dite divergente.

À Savoir

Limites classiques

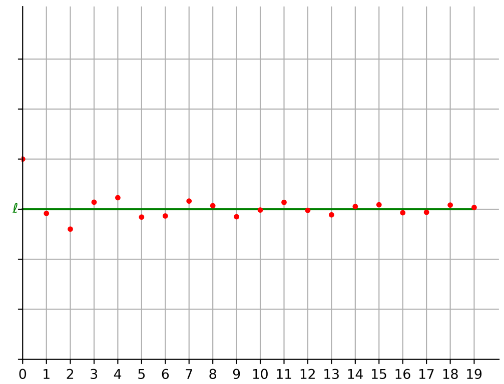
Soit $a > 0$. Les limites suivantes sont à connaître :

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^a} &= 0, \quad \text{si } a>0 \\ \lim_{n\to+\infty} n^a &= +\infty, \quad \text{si } a>0 \\ \lim_{n\to+\infty} t^n &= 0, \quad \text{si } t \in]-1,1[\\ \lim_{n\to+\infty} a^n &= +\infty, \quad \text{si } a>1 \\ \lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^n &= +\infty \\ \lim_{n\to+\infty} \ln(n) &= +\infty \end{aligned}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{-4n^5+3n+1}{n^2+2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{-4n^5}{n^2} = \lim_{n\to+\infty} -4n^3 = -\infty$$

Les limites des polynômes ou des fractions rationnelles sont données par les limites des monômes de plus haut degré ou de leur quotient.

Exemple 8 - Représentation graphique



III - Opérations sur les limites

À Savoir

Si la case indique ? ?, la limite est indéterminée. Il faut transformer l'expression (factorisation, expression conjuguée,...) pour pouvoir la déterminer.

* **Multiplication** par une constante.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	ℓ	$-\infty$	$+\infty$	
$\lim\limits_{n\to+\infty} ku_n =$	$k\ell$	$-\infty$	$+\infty$	si $k>0$
	$k\ell$	$+\infty$	$-\infty$	si $k<0$
	0	0	0	si $k=0$

* **Addition** de limites. Dans le tableau est indiquée la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n+v_n)$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ \ $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	ℓ_1	$-\infty$	$+\infty$
ℓ_2	$\ell_1+\ell_2$	$-\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	? ?
$+\infty$	$+\infty$	? ?	$+\infty$

* **Multiplication** de limites. Dans le tableau est indiquée la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n\times v_n)$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ \ $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$\ell_1<0$	$\ell_1>0$	0	$-\infty$	$+\infty$
$\ell_2<0$	$\ell_1\ell_2$	$\ell_1\ell_2$	0	$+\infty$	$-\infty$
$\ell_2>0$	$\ell_1\ell_2$	$\ell_1\ell_2$	0	$-\infty$	$+\infty$
0	0	0	0	? ?	? ?
$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	? ?	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	? ?	$-\infty$	$+\infty$

* **Quotient** de limites. Dans le tableau est indiquée la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_n}{v_n}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ \ $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$\ell_1<0$	$\ell_1>0$	0^-	0^+	$-\infty$	$+\infty$
$\ell_2<0$	$\frac{\ell_1}{\ell_2}$	$\frac{\ell_1}{\ell_2}$	$+\infty$	$-\infty$	0^+	0^-
$\ell_2>0$	$\frac{\ell_1}{\ell_2}$	$\frac{\ell_1}{\ell_2}$	$-\infty$	$+\infty$	0^-	0^+
0^-	0^+	0^-	? ?	? ?	0^+	0^-
$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	? ?	? ?
$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	? ?	? ?

Exemple 9 - Opérations sur les limites

* Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln(n)=+\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}-5\ln(n)\right)=-\infty$.
* Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2=+\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathrm{e}^{-n}=0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-n}}{n^2}=0$.
* Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} n^3=+\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n^5=+\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} n^3-n^5$ est une forme indéterminée. On va utiliser une factorisation pour lever l'indétermination :

$$n^3-n^5=n^5\left(\frac{1}{n^2}-1\right).$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}=0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2}-1\right)=-1$. De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^5=+\infty$. Ainsi,

$$\lim_{n\to+\infty} n^5\left(\frac{1}{n^2}-1\right)=-\infty.$$

À Savoir

Soit (u_n) et (v_n) deux suites de réels telles que, pour tout n entier naturel, $u_n \leqslant v_n$.
Si (u_n) et (v_n) convergent, alors

$$\lim_{n\to+\infty} u_n \leqslant \lim_{n\to+\infty} v_n.$$

À Savoir

Théorème d'encadrement.
Soit (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites de réels tells que pour tout n entier naturel,

$$v_n \leqslant u_n \leqslant w_n.$$

* Si (v_n) et (w_n) convergent vers une même limite ℓ, alors (u_n) converge et
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell.$$
* Si $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
* Si $\lim_{n\to+\infty} w_n = -\infty$, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Exemple 10 - Théorème d'encadrement

* Soit (u_n) une suite de réels telle que pour tout n entier naturel non nul,
$$\frac{n^5+n^3+1}{2n(1+n^4)} \leqslant u_n \leqslant \frac{n^5+n^4+1}{2n(1+n^4)}.$$
Comme la limite d'une fraction rationnelle est égale au rapport de ses monômes de plus hauts degrés,
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^5+n^3+1}{2n(1+n^4)} = \frac{1}{2} \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \frac{n^5+n^4+1}{2n(1+n^4)} = \frac{1}{2}.$$
D'après le théorème d'encadrement, (u_n) converge et $\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{2}$.
* Soit (u_n) une suite de réels telle que pour tout n entier naturel,
$$\frac{n^4+n^3+1}{n^2} \leqslant u_n.$$
Comme la limite d'une fraction rationnelle est égale au rapport de ses monômes de plus hauts degrés,
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^4+n^3+1}{n^2} = +\infty.$$
D'après le théorème d'encadrement, (u_n) converge et $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

IV - Existence de limites

À Savoir

Théorème de la limite monotone.
Soit (u_n) une suite de réels.
* Si (u_n) est croissante et majorée, alors (u_n) converge.
* Si (u_n) est décroissante et minorée, alors (u_n) converge.

Attention ! Ce théorème **ne** fournit **pas** la valeur de la limite. Pour cela, il faudra se reporter à une des techniques précédentes.

Exemple 11 - Limite monotone

Soit (u_n) une suite telle que

$$u_0 = -2 \text{ et } \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + 3.$$

* Montrons par récurrence que (u_n) est majorée par 6.
Initialisation. Pour $n = 0$, $u_0 = -2 \leqslant 6$ donc la propriété est vraie à l'ordre 0.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $u_n \leqslant 6$. Alors,

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{u_n}{2} + 3 \\ &\leqslant \frac{6}{2} + 3, \text{ d'après l'H.R.} \\ &\leqslant 6. \end{aligned}$$

Ainsi, la propriété est vraie à l'ordre $n+1$.
Conclusion. La propriété est vraie à l'ordre 0 et est héréditaire, donc

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\, u_n \leqslant 6.$$

∗ Étudions la monotonie de (u_n). Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{u_n}{2} + 3 - u_n \\ &= 3 - \frac{1}{2}u_n \\ &\geqslant 3 - \frac{1}{2}6, \text{ car } u_n \leqslant 6 \\ &\geqslant 0. \end{aligned}$$

Ainsi, la suite (u_n) est croissante.

∗ La suite (u_n) est croissante et majorée par 6. D'après le théorème de la limite monotone, (u_n) converge.

∗ Notons $\ell = \lim_{n\to+\infty} u_n$. Alors, $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$ et en passant à la limite dans l'égalité,

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{u_n}{2} + 3 \\ \ell &= \frac{\ell}{2} + 3 \\ \frac{\ell}{2} &= 3 \\ \ell &= 6. \end{aligned}$$

Ainsi, $\lim_{n\to+\infty} u_n = 6$.

V - Exercices

V.1 - Suites arithmétiques

Accroissement constant

Exercice 1. Pour tout n entier naturel, on pose $u_n = (n+5)^2 - (n+2)^2$.

1. Pour tout n entier naturel, simplifier l'expression $u_{n+1} - u_n$.

2. En déduire la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 2. Pour tout n entier naturel, on pose $u_n = (2n+5)^2 - (n+2)^2$.

1. Pour tout n entier naturel, simplifier l'expression $u_{n+1} - u_n$.

2. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle arithmétique ?

Utilisation d'une suite auxiliaire

Exercice 3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout n entier naturel non nul,

$$u_{n+1} = \sqrt{4 + u_n^2}.$$

Pour tout n entier naturel, on note $v_n = u_n^2$.

1. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique.

2. Exprimer v_n en fonction de n.

3. En déduire une expression de u_n en fonction de n.

Exercice 4. On pose $u_0 = 1$ et, pour tout n entier naturel, $u_{n+1} = \frac{u_n}{1+2u_n}$. On admet que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs strictement positives et, pour tout n entier naturel, on pose $v_n = \frac{1}{u_n}$.

1. Déterminer la nature de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2. Déterminer une expression de v_n en fonction de n.

3. En déduire une expression de u_n en fonction de n.

Exercice 5. On pose $u_0 = 3$ et, pour tout n entier naturel, $u_{n+1} = u_n + 2n - 1$. Pour tout n entier naturel, on pose $v_n = u_n - n^2$.

1. Déterminer la nature de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2. Déterminer une expression de v_n en fonction de n.

3. En déduire une expression de u_n en fonction de n.

V.2 - Suites géométriques

Manipulation des puissances

Exercice 6. Déterminer la raison de la suite géométrique définie pour tout n entier naturel par $u_n = 3^n \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}$.

Exercice 7. Déterminer la raison de la suite géométrique définie pour tout n entier naturel par $u_n = 3^n \times \left(\frac{1}{5}\right)^{2n+1}$.

Suites arithmético-géométriques

Exercice 8. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 4$ et, pour tout n entier naturel, $u_{n+1} = \frac{u_n}{5} + 8$. Pour tout n entier naturel, on pose $v_n = u_n - 10$.

1. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique.

2. Donner une expression de v_n en fonction de n.

3. En déduire une expression de u_n en fonction de n.

Exercice 9. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 5$ et, pour tout n entier naturel, $u_{n+1} = 2u_n + 1$.

1. Déterminer le réel ℓ tel que $\ell = 2\ell + 1$.

2. Pour tout n entier naturel, on pose $v_n = u_n - \ell$. Déterminer la nature de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puis une expression de v_n en fonction de n.

3. En déduire une expression de u_n en fonction de n.

V.3 - Monotonie

Signe de $u_{n+1} - u_n$

Exercice 10. Déterminer la monotonie de la suite définie pour tout n entier naturel par $u_n = (n+3)^2 + \frac{n}{4}$.

Exercice 11. Déterminer la monotonie de la suite définie pour tout n entier naturel par $u_n = (2n+1)^2$.

Utilisation d'une fonction auxiliaire

Exercice 12. Pour tout n entier naturel, on pose $u_n = \ln(1 + n + n^2)$.

1. Étudier les variations de la fonction définie pour tout réel x positif par $f(x) = \ln(1 + x + x^2)$.

2. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Exercice 13. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout n entier naturel, $u_{n+1} = \sqrt{4 + u_n}$.

1. Étudier les variations de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{4 + x}$.

2. Montrer par récurrence que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Exercice 14. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2$ et, pour tout n entier naturel, $u_{n+1} = \frac{u_n^2}{2} - u_n + \frac{3}{2}$. On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ.

1. Montrer que $\ell = \frac{\ell^2}{2} - \ell + \frac{3}{2}$.

2. En déduire les valeurs possibles pour ℓ

V.4 - Théorème de la limite monotone

Suites récurrentes & Passage à la limite

Exercice 15. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = \frac{1}{5}$ et, pour tout n entier naturel, $u_{n+1} = u_n(2 - u_n)$. On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction $f(x) = x(2 - x)$.

1. Dresser le tableau de variations de f.

2. Montrer que, pour tout n entier naturel, $u_n \in [0, 1]$.

3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.

4. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

5. Déterminer la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 16. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 4$ et, pour tout n entier naturel, $u_{n+1} = \frac{u_n^2}{5}$.

1. Montrer par récurrence que, pour tout n entier naturel, $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.

2. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel noté ℓ.

3. Déterminer la valeur de ℓ.

Avec un soupçon d'absurde

Exercice 17. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout n entier naturel, $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$.

1. Montrer que, pour tout n entire naturel, $u_n > 0$.

2. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

3. On suppose par l'absurde que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ. Montrer que $\ell = \ell + \frac{1}{\ell}$ puis obtenir une contradiction.

4. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 18. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 3$ et, pour tout n entier naturel, $u_{n+1} = u_n^2 + u_n - 3$.

1. Étudier les variations de la fonction $f : x \mapsto x^2 + x - 3$.

2. Montrer que, pour tout n entier naturel, $\sqrt{3} \leqslant u_n$.

3. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

4. On suppose par l'absurde que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite ℓ. Montrer que $\ell = \ell^2 + \ell - 3$ et en déduire la valeur de ℓ.

5. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

V.5 - Bijection monotone

Existence de solutions

Exercice 19. Pour tout x réel, on pose $f(x) = x^3 + x + 5$.

1. Étudier les variations de la fonction f.

2. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution α sur l'intervalle $[-2, -1]$.

Exercice 20. Pour tout x réel positif, on pose $f(x) = 3 - \frac{x+1}{e^x}$.

1. Étudier les variations de la fonction f.

2. Montrer que l'équation $f(x) = \frac{5}{2}$ possède une unique solution α sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

Exercice 21. Pour tout réel x, on pose $f(x) = e^x + x - 2$.

1. Étudier les variations de f.

2. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$. Cette solution sera notée α.

3. Montrer que $\alpha \in [0, 1]$.

4. En déduire que α est l'unique solution de l'équation $e^x = -x + 2$.

Construction de solutions approchées

Exercice 22. On considère le code suivant :

```
import numpy as np

def f(x):
    return x**2 - 2

a = 0
b = 3
while b - a > 0.25:
    m = (a + b) / 2
    if f(a) * f(m) <= 0:
        b = m
    else:
        a = m

print(a)
```

1. Indiquer les valeurs successives contenues par les variables `a`, `b` et `m`.

2. Expliquer la valeur affichée par ce programme.

Exercice 23.

1. Montrer que l'équation $e^x = 2$ admet une unique solution.

2. Expliquer la valeur affichée par le programme suivant :

```
import numpy as np

def f(x):
    return np.exp(x) - 2

a = 0
b = 3
while b - a > 10**(-5):
    m = (a + b) / 2
    if f(a) * f(m) <= 0:
        b = m
    else:
        a = m

print(a)
```

Exercice 24. Pour tout x réel, on pose $f(x) = 2 + (-x^2 + x - 1)\,e^{-x}$.

1. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[-1, 0]$.

3. Compléter l'algorithme suivant pour qu'il fournisse une valeur approchée de α à 10^{-4} près.

```
import numpy as np

def f(x):
    ...

a = ...
b = ...
while b - a > ...:
    m = (a + b) / 2
    if f(a) * f(m) > 0:
        a = ...
    else:
        ...

print(...)
```