III - Récurrences

À Savoir

Le raisonnement par récurrence se déroule en 3 étapes principales.

* On énonce clairement la propriété à démontrer. Cette propriété doit dépendre d'un entier naturel noté n.
* **L'initialisation.** On montre la propriété lorsque $n = 0$ (si la propriété est vraie pour tout entier naturel) ou lorsque $n = 1$ (si la propriété est vraie pour tout entier naturel non nul).

  Généralement, la propriété est une égalité. On montre alors que les deux membres de l'égalité sont égaux à une même valeur.
* **L'hérédité.** On fixe un entier naturel n. On suppose la propriété vraie à l'ordre n (c'est l'hypothèse de récurrence). On montre que la propriété est vraie lorsque n est remplacé par $(n+1)$ (ne pas oublier le parenthésage).

  Généralement, on part d'un côté de l'égalité et on arrive à l'autre côté. Une des étapes du calcul utilise l'hypothèse de récurrence.
* **Conclusion.** On conclut clairement en citant l'initialisation, l'hérédité et le principe de récurrence.

I - Calculs de sommes

Exemple 1 - Somme des n premiers entiers non nuls

Montrons par récurrence que, pour tout n entier naturel,

$$0 + 1 + 2 + \cdots + n = \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

On note P_n : $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Initialisation. Lorsque $n = 0$. Montrons que $\sum_{k=0}^{0} k = \frac{0(0+1)}{2}$. Or,

$$\sum_{k=0}^{0} k = 0$$

$$\frac{0(0+1)}{2} = 0$$

Ainsi, P_0 est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$. Montrons que $\sum_{k=0}^{n+1} k = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$. Or,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} k &= 0+1+2+\cdots+n+(n+1)\\ &= [0+1+\cdots+n]+(n+1), \text{ d'après les propriétés des sommes}\\ &= \frac{n(n+1)}{2}+(n+1), \text{ d'après l'hypothèse de récurrence}\\ &= \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}\\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2}.\end{aligned}$$

Ainsi, P_{n+1} est vraie.
Conclusion. Finalement, la propriété est vraie à l'ordre 0 et est héréditaire. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout n entier naturel, soit

$$\forall\ n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Exemple 2 - Somme des termes d'une suite géométrique

Soit $q \neq 1$. Montrons par récurrence que, pour tout n entier naturel,

$$q^0+q^1+q^2+\cdots+q^n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

On note $P_n : \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Initialisation. Lorsque $n=0$. Montrons que $\sum_{k=0}^{0} q^k = \frac{1-q^{0+1}}{1-q}$. Or,

$$\sum_{k=0}^{0} q^k = q^0 = 1$$

$$\frac{1-q^{0+1}}{1-q} = \frac{1-q}{1-q} = 1$$

Ainsi, P_0 est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$. Montrons que $\sum_{k=0}^{n+1} q^k = \frac{1-q^{(n+1)+1}}{1-q} = \frac{1-q^{n+2}}{1-q}$. Or,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} q^k &= q^0+q^1+q^2+\cdots+q^n+q^{n+1}\\ &= \left[q^0+q^1+\cdots+q^n\right]+q^{n+1}, \text{ d'après les propriétés des sommes}\\ &= \frac{1-q^{n+1}}{1-q}+q^{n+1}, \text{ d'après l'hypothèse de récurrence}\\ &= \frac{1-q^{n+1}+(1-q)q^{n+1}}{1-q}\\ &= \frac{1-q^{n+1}+q^{n+1}-\underbrace{q\cdot q^{n+1}}_{q^{n+2}}}{1-q}\\ &= \frac{1-q^{n+2}}{1-q}\end{aligned}$$

Ainsi, P_{n+1} est vraie.
Conclusion. Finalement, la propriété est vraie à l'ordre 0 et est héréditaire. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout n entier naturel, soit

$$\forall\ n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Solution de l'exercice 1. On note $P_n : \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Initialisation. Lorsque $n=0$. Montrons que $\sum\limits_{k=0}^{0} k^2 = \frac{0(0+1)(2\times 0+1)}{6}$. Or,

$$\sum_{k=0}^{0} k^2 = 0^2 = 0$$
$$\frac{0(0+1)(2\times 0+1)}{6} = 0$$

Ainsi, P_0 est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\sum\limits_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Montrons que $\sum\limits_{k=0}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3}{6}$. Or,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} k^2 &= 0^2+1^2+2^2+\cdots+n^2+(n+1)^2\\
&= \left[0^2+1^2+\cdots+n^2\right]+(n+1)^2, \text{ d'après les propriétés des sommes}\\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2, \text{ d'après l'hypothèse de récurrence}\\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6}\\
&= \frac{n+1}{6}\left[n(2n+1)+6(n+1)\right]\\
&= \frac{n+1}{6}\left[2n^2+n+6n+6\right]\\
&= \frac{n+1}{6}\left[2n^2+7n+6\right]\\
&= \frac{n+1}{6}(n+2)(2n+3), \text{ car } (n+2)(2n+3)=2n^2+7n+6
\end{aligned}$$

Ainsi, P_{n+1} est vraie.

Conclusion. Finalement, la propriété est vraie à l'ordre 0 et est héréditaire. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout n entier naturel, soit

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

□

Solution de l'exercice 2. On note P_n : $\sum\limits_{k=0}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

Initialisation. Lorsque $n=0$. Montrons que $\sum\limits_{k=0}^{0} k^3 = \left[\frac{0(0+1)}{2}\right]^2$. Or,

$$\sum_{k=0}^{0} k^3 = 0$$
$$\left[\frac{0(0+1)}{2}\right]^2 = 0$$

Ainsi, P_0 est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\sum\limits_{k=0}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$. Montrons que $\sum\limits_{k=0}^{n+1} k^3 = \left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2$. Or,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} k^3 &= 0^3+1^3+2^3+\cdots+n^3+(n+1)^3\\
&= \left[0^3+1^3+\cdots+n^3\right]+(n+1)^3, \text{ d'après les propriétés des sommes}\\
&= \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2+(n+1)^3, \text{ d'après l'hypothèse de récurrence}\\
&= \frac{(n+1)^2}{2^2}\left[n^2+4(n+1)\right]\\
&= \frac{(n+1)^2}{2^2}\left[n^2+4n+4\right]\\
&= \frac{(n+1)^2}{4}\times(n+2)^2.
\end{aligned}$$

Ainsi, P_{n+1} est vraie.

Conclusion. Finalement, la propriété est vraie à l'ordre 0 et est héréditaire. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout n entier naturel, soit

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} k^2 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$$

□

Solution de l'exercice 3. Notons $P_n : (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

Initialisation. Lorsque $n = 0$. Montrons que $(a+b)^0 = \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^k b^{0-k}$. Or,

$$(a+b)^0 = 1$$
$$\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^k b^{0-k} = \binom{0}{0} a^0 b^0 = 1$$

Ainsi, la propriété est vraie à l'ordre 0.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$. Montrons que $(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}$. Or,

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)^n(a+b), \text{ d'après la définition des puissances}\\
&= \left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}\right](a+b), \text{ d'après l'hypothèse de récurrence}\\
&= a\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} + b\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}, \text{ par distributivité}\\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k}, \text{ par distributivité}\\
&= \sum_{k+1=1}^{k+1=n+1} \binom{n}{k+1-1} a^{k+1} b^{n-(k+1)+1} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k}\\
&= \sum_{\ell=1}^{n+1} \binom{n}{\ell-1} a^{\ell} b^{n+1-\ell} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k}, \text{ en posant } \ell = k+1\\
&= \sum_{\ell=1}^{n} \binom{n}{\ell-1} a^{\ell} b^{n+1-\ell} + \binom{n}{n} a^{n+1} b^0 + \binom{n}{0} a^0 b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k}\\
&= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} + a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k}\\
&= \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right] a^k b^{n+1-k} + a^{n+1} + b^{n+1}\\
&= \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} + a^{n+1} + b^{n+1}, \text{ d'après le triangle de Pascal}\\
&= \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} + \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} b^0 + \binom{n+1}{0} a^0 b^{n+1}\\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}.
\end{aligned}$$

Ainsi, P_{n+1} est vraie.

Conclusion. Finalement, la propriété est vraie à l'ordre 0 et est héréditaire. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout n entier naturel, soit

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

□

II - Inégalités

Exemple 3 - Inégalité de Bernoulli

Soit $x > 0$. Montrons que, pour tout $n \geqslant 0$, $(1+x)^n \geqslant 1+nx$.

On note $P_n : (1+x)^n \geqslant 1+nx$.
Initialisation. Lorsque $n=0$. Montrons que $(1+x)^0 \geqslant 1+0x$. Or,

$$\begin{aligned}(1+x)^0 &= 1\\ 1+0x &= 1.\end{aligned}$$

Ainsi, la propriété P_0 est vraie.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $(1+x)^n \geqslant 1+nx$. Montrons que $(1+x)^{n+1} \geqslant 1+(n+1)x$. En effet,

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} &= (1+x)^n \times (1+x), \text{ d'après la définition des puissances}\\ &\geqslant (1+nx)\times(1+x), \text{ d'après l'hypothèse de récurrence}\\ &\geqslant 1+x+nx+nx^2\\ &\geqslant 1+(n+1)x+nx^2\\ &\geqslant 1+(n+1)x, \text{ car } nx^2 \geqslant 0\end{aligned}$$

Ainsi, P_{n+1} est vraie.
Conclusion. Finalement, la propriété est vraie à l'ordre 0 et est héréditaire. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout n entier naturel, soit

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ (1+x)^n \geqslant 1+nx.$$

Exemple 4 - Suite & Encadrement

Soit (u_n) définie par $u_0 = 3$ et, pour tout n entier naturel, $u_{n+1} = \sqrt{u_n+15}$. Montrer que, pour tout n entier naturel, $0 \leqslant u_n \leqslant 5$.

On note $P_n : 0 \leqslant u_n \leqslant 5$.
Initialisation. Lorsque $n=0$. Montrons que $0 \leqslant u_0 \leqslant 5$.
$u_0 = 3 \in [0,5]$, donc P_0 est vraie.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $0 \leqslant u_n \leqslant 5$. Montrons que $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 5$. En effet,

$$\begin{aligned}0 \leqslant u_n &\leqslant 5, \text{ d'après l'hypothèse de récurrence}\\ 15 \leqslant u_n+15 &\leqslant 20\\ \sqrt{15} \leqslant \sqrt{u_n+15} &\leqslant \sqrt{20}, \text{ la fonction racine étant croissante}\\ 0 \leqslant \sqrt{15} \leqslant \sqrt{u_n+15} \leqslant \sqrt{20} &\leqslant \sqrt{25}, \text{ car } 20 \leqslant 25\\ 0 \leqslant u_{n+1} &\leqslant 5, \text{ d'après la définition de } u_{n+1}\end{aligned}$$

Ainsi, P_{n+1} est vraie.
Conclusion. Finalement, la propriété est vraie à l'ordre 0 et est héréditaire. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout n entier naturel, soit

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant 5.$$

Solution de l'exercice 4. On note $P_n : u_n \leqslant 3$.
Initialisation. Lorsque $n=0$. Montrons que $u_0 \leqslant 3$.
Or, $u_0 = 0 \leqslant 3$, donc P_0 est vraie.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $u_n \leqslant 3$. Montrons que $u_{n+1} \leqslant 3$. En effet,

$$\begin{aligned}u_{n+1} &= \sqrt{u_n+6}, \text{ d'après la définition de } (u_n)\\ &\leqslant \sqrt{3+6}, \text{ d'après l'H.R. et la croissance de la fonction racine}\\ &\leqslant \sqrt{9}\\ &\leqslant 3.\end{aligned}$$

Ainsi, P_{n+1} est vraie.

Conclusion. Finalement, la propriété est vraie à l'ordre 0 et est héréditaire. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout n entier naturel, soit
$$\forall\, n \in \mathbb{N},\, u_n \leqslant 3.$$

$\square$

Solution de l'exercice 5. On note $P_n : 4 \leqslant u_n \leqslant 10$.
Initialisation. Lorsque $n = 0$. Montrons que $4 \leqslant u_0 \leqslant 10$.
$u_0 = 6 \in [4, 10]$, donc P_0 est vraie.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $4 \leqslant u_n \leqslant 10$. Montrons que $4 \leqslant u_{n+1} \leqslant 10$. En effet,

$$\begin{aligned}
4 &\leqslant u_n \leqslant 10, \text{ d'après l'hypothèse de récurrence}\\
19 &\leqslant u_n + 15 \leqslant 25\\
\sqrt{19} &\leqslant \sqrt{u_n + 15} \leqslant \sqrt{25}, \text{ la fonction racine étant croissante}\\
\sqrt{16} &\leqslant \sqrt{19} \leqslant \sqrt{u_n + 15} \leqslant \sqrt{25} \leqslant \sqrt{100}, \text{ la fonction racine étant croissante}\\
4 &\leqslant u_{n+1} \leqslant 10, \text{ d'après la définition de } u_{n+1}
\end{aligned}$$

Ainsi, P_{n+1} est vraie.
Conclusion. Finalement, la propriété est vraie à l'ordre 0 et est héréditaire. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout n entier naturel, soit
$$\forall\, n \in \mathbb{N},\, 4 \leqslant u_n \leqslant 10.$$

$\square$

III - Suites définies par récurrence

Solution de l'exercice 6. On note $P_n : u_n = 5 + 3n$.
Initialisation. Lorsque $n = 0$. Montrons que $u_0 = 5 + 3 \times 0$. Or,

$$\begin{aligned}
u_0 &= 5, \text{ d'après la définition}\\
5 + 3 \times 0 &= 5
\end{aligned}$$

Ainsi, la propriété est vraie à l'ordre 0.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $u_n = 5 + 3n$. Montrons que $u_{n+1} = 5 + 3(n + 1)$. En effet,

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= u_n + 3, \text{ d'après la définition}\\
&= 5 + 3n + 3, \text{ d'après l'hypothèse de récurrence}\\
&= 5 + 3(n + 1).
\end{aligned}$$

Ainsi, la propriété est vraie à l'ordre $n + 1$.
Conclusion. Finalement, la propriété est vraie à l'ordre 0 et est héréditaire. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout n entier naturel, soit
$$\forall\, n \in \mathbb{N},\, u_n = 5 + 3n.$$

$\square$

Solution de l'exercice 7. On note $P_n : u_n = 3 \times 5^n$.
Initialisation. Lorsque $n = 0$. Montrons que $u_0 = 3 \times 5^0$. Or,

$$\begin{aligned}
u_0 &= 3, \text{ d'après la définition}\\
3 \times 5^0 &= 3 \times 1 = 3
\end{aligned}$$

Ainsi, la propriété est vraie à l'ordre 0.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $u_n = 3 \times 5^n$. Montrons que $u_{n+1} = 3 \times 5^{n+1}$. En effet,

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= 5 \times u_n, \text{ d'après la définition}\\
&= 5 \times 3 \times 5^n, \text{ d'après l'hypothèse de récurrence}\\
&= 3 \times 5^{n+1}.
\end{aligned}$$

Ainsi, la propriété est vraie à l'ordre $n + 1$.
Conclusion. Finalement, la propriété est vraie à l'ordre 0 et est héréditaire. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout n entier naturel, soit
$$\forall\, n \in \mathbb{N},\, u_n = 3 \times 5^n.$$

$\square$

Solution de l'exercice 8. On note $P_n : u_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Initialisation. Lorsque $n = 0$. Montrons que $u_0 = \frac{0(0+1)}{2}$. Or,

$$u_0 = 0, \text{ d'après la définition}$$
$$\frac{0(0+1)}{2} = 0$$

Ainsi, la propriété est vraie à l'ordre 0.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $u_n = \frac{n(n+1)}{2}$. Montrons que $u_{n+1} = \frac{(n+1)(n+1+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$. En effet,

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + (n+1), \text{ d'après la définition} \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1), \text{ d'après l'hypothèse de récurrence} \\ &= (n+1)\left[\frac{n}{2} + 1\right] \\ &= (n+1)\frac{n+2}{2} \end{aligned}$$

Ainsi, la propriété est vraie à l'ordre $n + 1$.
Conclusion. Finalement, la propriété est vraie à l'ordre 0 et est héréditaire. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout n entier naturel, soit

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

□

Solution de l'exercice 9. On note $P_n : u_n = \sqrt{n+9}$.
Initialisation. Lorsque $n = 0$. Montrons que $u_0 = \sqrt{0+9}$. Or,

$$u_0 = 3, \text{ d'après la définition}$$
$$\sqrt{0+9} = \sqrt{9} = 3$$

Ainsi, la propriété est vraie à l'ordre 0.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $u_n = \sqrt{9+n}$. Montrons que $u_{n+1} = \sqrt{9+(n+1)} = \sqrt{n+10}$. En effet,

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \sqrt{1+u_n^2}, \text{ d'après la définition} \\ &= \sqrt{1+n+9}, \text{ d'après l'hypothèse de récurrence} \\ &= \sqrt{n+10} \end{aligned}$$

Ainsi, la propriété est vraie à l'ordre $n + 1$.
Conclusion. Finalement, la propriété est vraie à l'ordre 0 et est héréditaire. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout n entier naturel, soit

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = \sqrt{9+n}.$$

□

Solution de l'exercice 10. On note $P_n : u_n = \frac{2}{2n+1}$.
Initialisation. Lorsque $n = 0$. Montrons que $u_0 = \frac{2}{2\times 0+1}$. Or,

$$u_0 = 2, \text{ d'après la définition}$$
$$\frac{2}{2\times 0+1} = 2$$

Ainsi, la propriété est vraie à l'ordre 0.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $u_n = \frac{2}{2n+1}$. Montrons que $u_{n+1} = \frac{2}{2(n+1)+1} = \frac{2}{2n+3}$. En effet,

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{u_n}{u_n+1}, \text{ d'après la définition} \\ &= \frac{\frac{2}{2n+1}}{\frac{2}{2n+1}+1}, \text{ d'après l'hypothèse de récurrence} \\ &= \frac{\frac{2}{2n+1}}{\frac{2+2n+1}{2n+1}} \\ &= \frac{2}{2n+1} \times \frac{2n+1}{2+2n+1} \\ &= \frac{2}{2+2n+1} \\ &= \frac{2}{2n+3}. \end{aligned}$$

Ainsi, la propriété est vraie à l'ordre $n + 1$.
Conclusion. Finalement, la propriété est vraie à l'ordre 0 et est héréditaire. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout n entier naturel, soit

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{2}{2n+1}.$$

□