

V - Dérivations Stratégie

Lors du calcul des dérivées, il est important d'appliquer une stratégie de calculs pour *reconnaître* la formule à utiliser. Nous présentons et illustrons ces règles ci-dessous, de la plus élémentaire à la plus élaborée. Plutôt que d'écrire « La dérivée de la fonction $f(x) = \dots$ est la fonction $f'(x) = \dots$ », nous adopterons la notation **non standard** $f(x) \rightsquigarrow f'(x)$.

I - Fonctions élémentaires

À Savoir

fonction	\rightsquigarrow	dérivée
$c \in \mathbb{R}, c$	\rightsquigarrow	0

Exemple 1

$$3 \rightsquigarrow 0$$

À Savoir

fonction	\rightsquigarrow	dérivée
x^n	\rightsquigarrow	nx^{n-1}

Exemple 2

x	\rightsquigarrow	1
x^2	\rightsquigarrow	$2x$
$\sqrt{x} = x^{1/2}$	\rightsquigarrow	$\frac{1}{2}x^{1/2-1} = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$x^{1/3}$	\rightsquigarrow	$\frac{1}{3}x^{1/3-1} = \frac{1}{3}x^{-2/3}$
$\frac{1}{x^2} = x^{-2}$	\rightsquigarrow	$-2x^{-2-1} = -\frac{2}{x^3}$
$\frac{1}{x^3} = x^{-3}$	\rightsquigarrow	$-3x^{-3-1} = -\frac{3}{x^4}$
$\frac{1}{x^{1/3}} = x^{-1/3}$	\rightsquigarrow	$-\frac{1}{3}x^{-1/3-1} = -\frac{1}{x^{4/3}}$

À Savoir

fonction	\rightsquigarrow	dérivée
$\ln(x)$	\rightsquigarrow	$\frac{1}{x}$

À Savoir

fonction	\rightsquigarrow	dérivée
e^{ax}	\rightsquigarrow	$a e^{ax}$

Exemple 3

e^x	\rightsquigarrow	e^x
e^{3x}	\rightsquigarrow	$3e^{3x}$

II - Fonctions composées

À Savoir

$$\begin{array}{lcl} \text{fonction} & \rightsquigarrow & \text{dérivée} \\ \lambda u(x) & \rightsquigarrow & \lambda u'(x) \end{array}$$

Exemple 4

$$\begin{array}{lcl} \frac{1}{3}x^2 & \rightsquigarrow & \frac{1}{3} \times 2x = \frac{2x}{3} \\ 3x^{1/2} & \rightsquigarrow & 3 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{3}{2\sqrt{x}} \end{array}$$

À Savoir

$$\begin{array}{lcl} \text{fonction} & \rightsquigarrow & \text{dérivée} \\ u(x) + v(x) & \rightsquigarrow & u'(x) + v'(x) \end{array}$$

Exemple 5

$$\begin{array}{lcl} x^4 + x^5 & \rightsquigarrow & 4x^3 + 5x^4 \\ e^{3x} + \frac{1}{x} & \rightsquigarrow & 3e^{3x} - \frac{1}{x^2} \end{array}$$

À Savoir

$$\begin{array}{lcl} \text{fonction} & \rightsquigarrow & \text{dérivée} \\ \lambda u(x) + \mu v(x) & \rightsquigarrow & \lambda u'(x) + \mu v'(x) \end{array}$$

Exemple 6

$$\begin{array}{lcl} 3x - 2x^7 & \rightsquigarrow & 3 - 2 \times 7x^6 = 3 - 14x^6 \\ \frac{e^{3x}}{3} + \frac{2}{x} & \rightsquigarrow & \frac{1}{3} \times 3e^{3x} + 2 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = e^{3x} - \frac{2}{x^2} \end{array}$$

À Savoir

$$\begin{array}{lcl} \text{fonction} & \rightsquigarrow & \text{dérivée} \\ u^n(x) & \rightsquigarrow & nu'(x)u^{n-1}(x) \end{array}$$

Exemple 7

$$\begin{array}{lcl} (x+2)^2 = \underbrace{(x+2)}_{u(x)}^2 & \rightsquigarrow & 2 \times 1 \times (x+2)^{2-1} = 2(x+2) \\ \frac{1}{(x+3)^4} = \underbrace{(x+3)}_{u(x)}^{-4} & \rightsquigarrow & -4 \times 1 \times (x+3)^{-4-1} = -\frac{4}{(x+3)^5} \\ \underbrace{(x^2+3)}_{u(x)}^4 & \rightsquigarrow & 4 \times 2x \times (x^2+3)^{4-1} = 8x(x^2+3)^3 \\ \frac{1}{(x^2+3)^4} = \underbrace{(x^2+3)}_{u(x)}^{-4} & \rightsquigarrow & -4 \times (2x) \times (x^2+3)^{-4-1} = -\frac{8x}{(x^2+3)^5} \\ \underbrace{(x^3+e^{2x})}_{u(x)}^3 & \rightsquigarrow & 3 \times (3x^2 + 2e^{2x})(x^3 + e^{2x})^2 \\ \underbrace{(x^3+e^{3x})}_{u(x)}^5 & \rightsquigarrow & 5(3x^2 + 3e^{3x})(x^3 + e^{3x})^4 \end{array}$$

À Savoir

$$\begin{array}{lcl} \text{fonction} & \rightsquigarrow & \text{dérivée} \\ \ln |u(x)| & \rightsquigarrow & \frac{u'(x)}{u(x)} \end{array}$$

Exemple 8

$$\begin{array}{lcl} \ln |x+12| & \rightsquigarrow & \frac{1}{x+12} \\ \ln(x^2 + e^{3x}) & \rightsquigarrow & \frac{2x+3e^{3x}}{x^2+e^{3x}} \\ \ln(3x^2 + e^{2x}) & \rightsquigarrow & \frac{3 \times 2x + 2e^{2x}}{3x^2+e^{2x}} = 2 \frac{3x+e^{2x}}{3x^2+e^{2x}} \end{array}$$

À Savoir

$$\begin{array}{lcl} \text{fonction} & \rightsquigarrow & \text{dérivée} \\ e^{u(x)} & \rightsquigarrow & u'(x) e^{u(x)} \end{array}$$

Exemple 9

$$\begin{aligned}
 e^{x+12} &\rightsquigarrow \underbrace{1}_{u'(x)} \times e^{x+12} = e^{x+12} \\
 e^{x^2+e^{3x}} &\rightsquigarrow \underbrace{(2x + 3e^{3x})}_{u'(x)} e^{x^2+e^{3x}} \\
 e^{3x^2+e^{2x}} &\rightsquigarrow \underbrace{(3 \times 2x + 2e^{2x})}_{u'(x)} e^{3x^2+e^{2x}} = 2(3x + e^{2x}) e^{3x^2+e^{2x}}
 \end{aligned}$$

À Savoir

$$\begin{aligned}
 \text{fonction} &\rightsquigarrow \text{dérivée} \\
 u(x) \times v(x) &\rightsquigarrow u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x)
 \end{aligned}$$

Exemple 10

$$\begin{aligned}
 \underbrace{(x+1)}_{u(x)} \underbrace{e^{2x}}_{v(x)} &\rightsquigarrow \underbrace{1}_{u'(x)} \times \underbrace{e^{2x}}_{v(x)} + \underbrace{(x+1)}_{u(x)} \underbrace{2e^{2x}}_{v'(x)} = (2x+3)e^{2x} \\
 \underbrace{(x+1)}_{u(x)} \underbrace{\ln|x|}_{v(x)} &\rightsquigarrow \underbrace{1}_{u'(x)} \times \underbrace{\ln|x|}_{v(x)} + \underbrace{(x+1)}_{u(x)} \underbrace{\frac{1}{x}}_{v'(x)} = \ln|x| + \frac{x+1}{x} \\
 \underbrace{(x^2+1)}_{u(x)} \underbrace{e^{3x+4}}_{v(x)} &\rightsquigarrow \underbrace{2x}_{u'(x)} \underbrace{e^{3x+4}}_{v(x)} + \underbrace{(x^2+1)}_{u(x)} \underbrace{3e^{3x+4}}_{v'(x)} = (3x^2+2x+3)e^{3x+4}
 \end{aligned}$$

À Savoir

$$\begin{aligned}
 \text{fonction} &\rightsquigarrow \text{dérivée} \\
 \int_a^x f(t) dt &\rightsquigarrow f(x)
 \end{aligned}$$

Exemple 11

$$\begin{aligned}
 \int_3^x \frac{e^t}{t^4} dt &\rightsquigarrow \frac{e^x}{x^4} \\
 \int_1^x \frac{\ln(t)}{1+t^5} dt &\rightsquigarrow \frac{\ln(x)}{1+x^5}
 \end{aligned}$$

III - Exercices

Solution de l'exercice 1.

1. La fonction $f(x) = 3$ est constante. Sa dérivée vaut $f'(x) = 0$.
2. La fonction $f(x) = e$ est constante. Sa dérivée vaut $f'(x) = 0$.
3. La fonction $f(x) = x^{10}$ est une fonction puissance. Sa dérivée vaut

$$f'(x) = 10 \times x^{10-1} = 10 \times x^9.$$

4. La fonction $f(x) = x^{3/4}$ est une fonction puissance. Sa dérivée vaut

$$f'(x) = \frac{3}{4} x^{\frac{3}{4}-1} = \frac{3}{4} x^{-\frac{1}{4}} = \frac{3}{4x^{\frac{1}{4}}}.$$

5. La fonction $f(x) = \frac{1}{x^5} = x^{-5}$ est une fonction puissance. Sa dérivée vaut

$$f'(x) = -5x^{-5-1} = -5x^{-6} = -\frac{5}{x^6}.$$

6. La fonction $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ est une fonction puissance. Sa dérivée vaut

$$f'(x) = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

7. La fonction $f(x) = \ln|x|$ est la fonction logarithme népérien. Sa dérivée vaut $f'(x) = \frac{1}{x}$.

8. La fonction $f(x) = e^x$ est la fonction exponentielle. Sa dérivée vaut $f'(x) = e^x$.

9. La fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ est la fonction inverse. Sa dérivée vaut $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

On peut également remarquer que $f(x) = x^{-1}$ et appliquer la formule pour les fonctions puissances :

$$f'(x) = -1x^{-1-1} = -x^{-2}.$$

10. La fonction $f(x) = \ln |2x|$ est de la forme $\ln |u(x)|$ en posant $u(x) = 2x$. Comme $u'(x) = 2$, on obtient

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{2}{2x} = \frac{1}{x}.$$

11. La fonction $f(x) = e^{5x}$ est une fonction exponentielle. Sa dérivée vaut $f'(x) = 5e^{5x}$. \square

Solution de l'exercice 2.

1. La fonction $f(x) = 4x + 3$ est de la forme $f(x) = \lambda u(x) + v(x)$ avec $\lambda = 4$, $u(x) = x$, $v(x) = 3$. Comme $u'(x) = 1$ et $v'(x) = 0$, alors $f'(x) = 4$.

2. La fonction $f(x) = 2x^2 + x^5$ est de la forme $f(x) = \lambda u(x) + v(x)$ avec $\lambda = 2$, $u(x) = x^2$ et $v(x) = x^5$. Comme $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = 5x^4$, alors

$$f'(x) = 2 \times 2x + 5x^4 = 4x + 5x^4.$$

3. La fonction $f(x) = 3e^x + \frac{4}{5}\ln(x) + 2\sqrt{x}$ est de la forme $f(x) = \lambda u(x) + \mu v(x) + \nu w(x)$, avec $\lambda = 3$, $u(x) = e^x$, $\mu = \frac{4}{5}$, $v(x) = x^5$ et $\nu = 2$ et $w(x) = \sqrt{x}$. Comme $u(x) = e^x$, $v'(x) = \frac{1}{x}$ et $w'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, alors

$$f'(x) = 3e^x + \frac{4}{5x} + 2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = 3e^x + \frac{4}{5x} + \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

4. La fonction $f(x) = (2x)^3$ est de la forme $f(x) = u(x)^n$, avec $n = 3$ et $u(x) = 2x$. Comme $u'(x) = 2$, alors

$$f'(x) = \underbrace{3}_n \times \underbrace{2}_{u'(x)} \times \underbrace{(2x)^4}_{u(x)^{n-1}} = 6(2x)^4.$$

5. La fonction $f(x) = 3e^{2x} - (4x)^4$ est de la forme $f(x) = \lambda u(x) + v(x)$, avec $\lambda = 3$, $u(x) = e^{2x}$ et $v(x) = (4x)^4$. Comme $u'(x) = 2e^{2x}$ et $v'(x) = 4 \times 4 \times (4x)^3 = 4^2(4x)^3$, alors

$$f'(x) = 3 \times 2e^{2x} - 4^2(4x)^3 = 6e^{2x} - 4^2 \times 4^3 \times x^3 = 6e^{2x} - 4^5 x^3.$$

\square