IX - Suites numériques

I - Suites usuelles

À Savoir

La suite (u_n) est une suite arithmétique de raison r si
$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + r.$$
Alors,
$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 + nr.$$

Exemple 1 - Une suite arithmétique

Soit (u_n) telle que $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 3$. Alors, (u_n) est une suite arithmétique de raison 3. Ainsi,
$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = 1 + 3n.$$

À Savoir

La suite (u_n) est une suite géométrique de raison q si
$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = q \times u_n.$$
Alors,
$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = q^n u_0.$$

Exemple 2 - Une suite géométrique

Soit (u_n) telle que $u_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n$. Alors, (u_n) est une suite arithmétique de raison 2. Ainsi,
$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = 3 \times 2^n.$$

À Savoir

La suite (u_n) est une suite arithmético-géométrique si
$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = q \times u_n + r.$$

Exemple 3 - Une suite arithmético-géométrique

L'étude d'une suite arithmético-géométrique suit toujours le schéma suivant.
Soit (u_n) telle que $u_0 = 7$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n + 3$.

* Recherche du réel ℓ tel que $\ell = 2\ell + 3$:
$$\begin{aligned} \ell &= 2\ell + 3 \\ 0 &= 2\ell - \ell + 3 \\ \ell &= -3. \end{aligned}$$
* Étude de la suite définie par $v_n = u_n - \ell$. Alors,
$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - \ell \\ &= (2u_n + 3) - (2\ell + 3) \\ &= 2u_n + 3 - 2\ell - 3 \\ &= 2(u_n - \ell) \\ &= 2v_n. \end{aligned}$$
De plus, $v_0 = u_0 - \ell = 7 - (-3) = 10$.
Ainsi, (v_n) est une suite géométrique de raison 2 et
$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ v_n = 10 \times 2^n.$$
* Retour sur u_n. D'après la définition,
$$\begin{aligned} u_n - \ell &= v_n \\ u_n &= v_n + \ell \\ &= 10 \times 2^n - 3 = 5 \times 2^{n+1} - 3. \end{aligned}$$

II - Comportement des suites

À Savoir

Soit (u_n) une suite de nombres réels.

* La suite (u_n) est croissante si
$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n \geqslant 0.$$
* La suite (u_n) est décroissante si
$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n \leqslant 0.$$

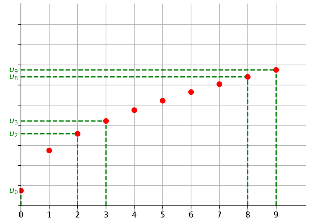
Exemple 4 - Études de monotonie

* On définit $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ pour tout entier naturel n non nul.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \frac{1}{n+1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \\ &= \frac{1}{n+1} \geqslant 0. \end{aligned}$$
Ainsi, la suite (u_n) est croissante.
* Soit $t \in]0,1[$. On définit $v_n = \ln(1+t^n)$ pour tout entier naturel n.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $t \in]0,1[$,
$$\begin{aligned} t &\leqslant 1 \\ t^n \times t &\leqslant t^n \times 1, \quad \text{car } t^n \geqslant 0 \\ 1 + t^{n+1} &\leqslant 1 + t^n \\ \ln(1+t^{n+1}) &\leqslant \ln(1+t^n), \quad \text{car ln est croissante} \\ v_{n+1} &\leqslant v_n \\ v_{n+1} - v_n &\leqslant 0. \end{aligned}$$
Ainsi, la suite (v_n) est croissante.

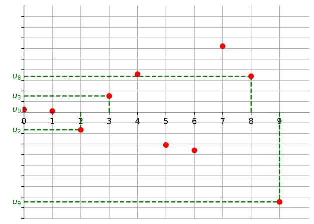
Attention ! Il convient de travailler avec un entier naturel n **quelconque**. Montrer que $u_1 - u_0 \geqslant 0$ ou $u_2 - u_1 \geqslant 0$ n'est d'aucune utilité pour étudier la monotonie d'une suite.

Exemple 5 - Représentations graphiques

Suite croissante.



Suite non monotone.



À Savoir

Soit (u_n) une suite de réels.

* La suite (u_n) est majorée s'il existe un réel M tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant M$.
* La suite (u_n) est minorée s'il existe un réel m tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant m$.

Exemple 6 - Étude de majorant

Soit $t \in]0,1[$. On définit $v_n = \ln(1+t^n)$ pour tout entier naturel n.

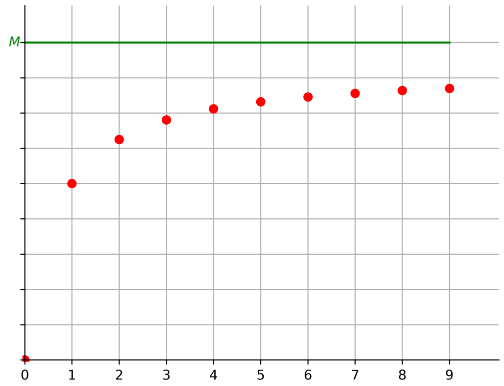
Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $t \in]0,1[$,

$$\begin{aligned} t &\leqslant 1 \\ t^n &\leqslant 1^n, \text{ car les puissances sont croissantes sur } \mathbb{R}_+ \\ 1+t^n &\leqslant 2 \\ \ln(1+t^n) &\leqslant \ln(2), \text{ car ln est croissante} \end{aligned}$$

Ainsi, la suite (v_n) est majorée par $\ln(2)$.

Attention ! Le minorant ou le majorant **ne** doit **pas** dépendre de l'indice n.

Exemple 7 - Représentation graphique



À Savoir

La suite (u_n) est convergente s'il existe un réel ℓ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$. Sinon, la suite (u_n) est dite divergente.

À Savoir

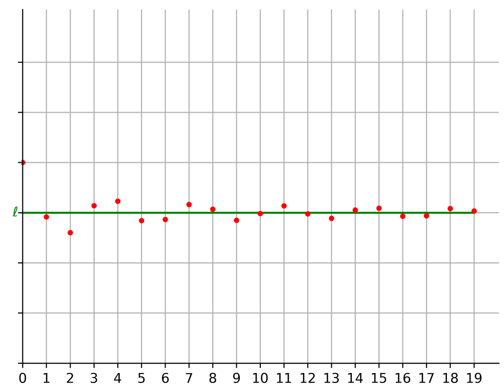
Limites classiques

Soit $a > 0$. Les limites suivantes sont à connaître :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^a} = 0, \text{ si } a > 0$$
$$\lim_{n\to+\infty} n^a = +\infty, \text{ si } a > 0$$
$$\lim_{n\to+\infty} t^n = 0, \text{ si } t \in]-1,1[$$
$$\lim_{n\to+\infty} a^n = +\infty, \text{ si } a > 1$$
$$\lim_{n\to+\infty} e^n = +\infty$$
$$\lim_{n\to+\infty} \ln(n) = +\infty$$
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{-4n^5+3n+1}{n^2+2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{-4n^5}{n^2} = \lim_{n\to+\infty} -4n^3 = -\infty$$

Les limites des polynômes ou des fractions rationnelles sont données par les limites des monômes de plus haut degré ou de leur quotient.

Exemple 8 - Représentation graphique



III - Opérations sur les limites

À Savoir

Si la case indique ? ?, la limite est indéterminée. Il faut transformer l'expression (factorisation, expression conjuguée,...) pour pouvoir la déterminer.

* **Multiplication** par une constante.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	ℓ	$-\infty$	$+\infty$	
$\lim\limits_{n\to+\infty} ku_n =$	$k\ell$	$-\infty$	$+\infty$	si $k>0$
	$k\ell$	$+\infty$	$-\infty$	si $k<0$
	0	0	0	si $k=0$

* **Addition** de limites. Dans le tableau est indiquée la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n+v_n)$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ \ $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	ℓ_1	$-\infty$	$+\infty$
ℓ_2	$\ell_1+\ell_2$	$-\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	? ?
$+\infty$	$+\infty$	? ?	$+\infty$

* **Multiplication** de limites. Dans le tableau est indiquée la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n\times v_n)$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ \ $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$\ell_1<0$	$\ell_1>0$	0	$-\infty$	$+\infty$
$\ell_2<0$	$\ell_1\ell_2$	$\ell_1\ell_2$	0	$+\infty$	$-\infty$
$\ell_2>0$	$\ell_1\ell_2$	$\ell_1\ell_2$	0	$-\infty$	$+\infty$
0	0	0	0	? ?	? ?
$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	? ?	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	? ?	$-\infty$	$+\infty$

* **Quotient** de limites. Dans le tableau est indiquée la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_n}{v_n}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ \ $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$\ell_1<0$	$\ell_1>0$	0^-	0^+	$-\infty$	$+\infty$
$\ell_2<0$	$\frac{\ell_1}{\ell_2}$	$\frac{\ell_1}{\ell_2}$	$+\infty$	$-\infty$	0^+	0^-
$\ell_2>0$	$\frac{\ell_1}{\ell_2}$	$\frac{\ell_1}{\ell_2}$	$-\infty$	$+\infty$	0^-	0^+
0^-	0^+	0^-	? ?	? ?	0^+	0^-
$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	? ?	? ?
$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	? ?	? ?

Exemple 9 - Opérations sur les limites

* Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln(n)=+\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}-5\ln(n)\right)=-\infty$.
* Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}n^2=+\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathrm{e}^{-n}=0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-n}}{n^2}=0$.
* Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}n^3=+\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}n^5=+\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}n^3-n^5$ est une forme indéterminée. On va utiliser une factorisation pour lever l'indétermination :

$$n^3-n^5=n^5\left(\frac{1}{n^2}-1\right).$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}=0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2}-1\right)=-1$. De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty}n^5=+\infty$. Ainsi,

$$\lim_{n\to+\infty}n^5\left(\frac{1}{n^2}-1\right)=-\infty.$$

À Savoir

Soit (u_n) et (v_n) deux suites de réels telles que, pour tout n entier naturel, $u_n \leqslant v_n$.
Si (u_n) et (v_n) convergent, alors

$$\lim_{n\to+\infty} u_n \leqslant \lim_{n\to+\infty} v_n.$$

À Savoir

Théorème d'encadrement.
Soit (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites de réels tells que pour tout n entier naturel,

$$v_n \leqslant u_n \leqslant w_n.$$

* Si (v_n) et (w_n) convergent vers une même limite ℓ, alors (u_n) converge et
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell.$$
* Si $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
* Si $\lim_{n\to+\infty} w_n = -\infty$, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Exemple 10 - Théorème d'encadrement

* Soit (u_n) une suite de réels telle que pour tout n entier naturel non nul,
$$\frac{n^5+n^3+1}{2n(1+n^4)} \leqslant u_n \leqslant \frac{n^5+n^4+1}{2n(1+n^4)}.$$
Comme la limite d'une fraction rationnelle est égale au rapport de ses monômes de plus hauts degrés,
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^5+n^3+1}{2n(1+n^4)} = \frac{1}{2} \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \frac{n^5+n^4+1}{2n(1+n^4)} = \frac{1}{2}.$$
D'après le théorème d'encadrement, (u_n) converge et $\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{2}$.
* Soit (u_n) une suite de réels telle que pour tout n entier naturel,
$$\frac{n^4+n^3+1}{n^2} \leqslant u_n.$$
Comme la limite d'une fraction rationnelle est égale au rapport de ses monômes de plus hauts degrés,
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^4+n^3+1}{n^2} = +\infty.$$
D'après le théorème d'encadrement, (u_n) converge et $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

IV - Existence de limites

À Savoir

Théorème de la limite monotone.
Soit (u_n) une suite de réels.
* Si (u_n) est croissante et majorée, alors (u_n) converge.
* Si (u_n) est décroissante et minorée, alors (u_n) converge.

Attention ! Ce théorème **ne** fournit **pas** la valeur de la limite. Pour cela, il faudra se reporter à une des techniques précédentes.

Exemple 11 - Limite monotone

Soit (u_n) une suite telle que

$$u_0 = -2 \text{ et } \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + 3.$$

* Montrons par récurrence que (u_n) est majorée par 6.
Initialisation. Pour $n = 0$, $u_0 = -2 \leqslant 6$ donc la propriété est vraie à l'ordre 0.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $u_n \leqslant 6$. Alors,

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{u_n}{2} + 3 \\ &\leqslant \frac{6}{2} + 3, \text{ d'après l'H.R.} \\ &\leqslant 6. \end{aligned}$$

Ainsi, la propriété est vraie à l'ordre $n+1$.
Conclusion. La propriété est vraie à l'ordre 0 et est héréditaire, donc

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\, u_n \leqslant 6.$$

* Étudions la monotonie de (u_n). Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{u_n}{2} + 3 - u_n \\ &= 3 - \frac{1}{2}u_n \\ &\geqslant 3 - \frac{1}{2}6, \quad \text{car } u_n \leqslant 6 \\ &\geqslant 0. \end{aligned}$$

Ainsi, la suite (u_n) est croissante.

* La suite (u_n) est croissante et majorée par 6. D'après le théorème de la limite monotone, (u_n) converge.
* Notons $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. Alors, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$ et en passant à la limite dans l'égalité,

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{u_n}{2} + 3 \\ \ell &= \frac{\ell}{2} + 3 \\ \frac{\ell}{2} &= 3 \\ \ell &= 6. \end{aligned}$$

Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 6$.

V - Exercices

V.1 - Suites arithmétiques

Accroissement constant

Solution de l'exercice 1.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= (n+1+5)^2 - (n+1+2)^2 - \left((n+5)^2 - (n+2)^2\right) \\ &= (n+6)^2 - (n+3)^2 - (n+5)^2 + (n+2)^2 \\ &= n^2 + 12n + 36 - (n^2 + 6n + 9) - (n^2 + 10n + 25) + n^2 + 4n + 4 \\ &= 2n^2 + 16n + 40 - (2n^2 + 16n + 34) \\ &= 6. \end{aligned}$$

Ainsi, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison 6. □

Solution de l'exercice 2.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= (2(n+1)+5)^2 - (n+1+2)^2 - \left((2n+5)^2 - (n+2)^2\right) \\ &= (2n+7)^2 - (n+3)^2 - (2n+5)^2 + (n+2)^2 \\ &= 4n^2 + 28n + 49 - (n^2 + 6n + 9) - (4n^2 + 20n + 25) + n^2 + 4n + 4 \\ &= 5n^2 + 32n + 53 - (5n^2 + 26n + 34) \\ &= 6n + 19. \end{aligned}$$

Comme la quantité $u_{n+1} - u_n$ n'est pas constante, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas une suite arithmétique. □

Utilisation d'une suite auxiliaire

Solution de l'exercice 3.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1}^2 = \left(\sqrt{4 + u_n^2}\right)^2 \\ &= 4 + u_n^2 \\ &= 4 + v_n. \end{aligned}$$

Ainsi, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison 4.

2. Comme $v_0 = 1^1 = 1$, pour tout n entier naturel,

$$v_n = 1 + 4n.$$

3. Comme $u_n = \sqrt{4 + u_{n-1}^2}$, alors $u_n \geqslant 0$.
De plus, $v_n = u_n^2$, donc pour tout n entier naturel,

$$u_n = \sqrt{v_n} = \sqrt{1+4n}.$$

□

Solution de l'exercice 4.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{1}{u_{n+1}} = \frac{1}{\frac{u_n}{1+2u_n}} \\ &= \frac{1+2u_n}{u_n} \\ &= \frac{1}{u_n} + \frac{2u_n}{u_n} \\ &= v_n + 2. \end{aligned}$$

Ainsi, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison 2.

2. D'après la question précédente, pour tout n entier naturel,

$$v_n = 2n + v_0 = 2n + 1.$$

3. Ainsi, pour tout n entier naturel,

$$u_n = \frac{1}{v_n} = \frac{1}{2n+1}.$$

□

Solution de l'exercice 5.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - (n+1)^2 = u_n + 2n - 1 - (n^2 + 2n + 1) \\ &= u_n + 2n - 1 - n^2 - 2n - 1 \\ &= u_n - n^2 - 2 \\ &= v_n - 2. \end{aligned}$$

Ainsi, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison -2.

2. D'après la question précédente, pour tout n entier naturel,

$$v_n = -2n + v_1 = -2n + u_1 - 1^2 = -2n + 2.$$

3. Ainsi, pour tout n entier naturel,

$$u_n = v_n + n^2 = n^2 - 2n + 2.$$

□

V.2 - Suites géométriques

Manipulation des puissances

Solution de l'exercice 6. Pour tout n entier naturel,

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{3^n}{5^{n+1}} = \frac{3^n}{5 \times 5^n} \\ &= \frac{1}{5} \times \left(\frac{3}{5}\right)^n. \end{aligned}$$

Ainsi, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{3}{5}$. □

Solution de l'exercice 7. Pour tout n entier naturel,

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{3^n}{5^{2n+1}} = \frac{3^n}{5 \times 5^{2n}} = \frac{3^n}{5 \times 25^n} \\ &= \frac{1}{5} \times \left(\frac{3}{25}\right)^n. \end{aligned}$$

Ainsi, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{3}{25}$. □

Suites arithmético-géométriques

Solution de l'exercice 8.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 10 = \frac{u_n}{5} + 8 - 10 \\ &= \frac{u_n}{5} - 2 = \frac{1}{5}(u_n - 10) \\ &= \frac{1}{5} v_n. \end{aligned}$$

Ainsi, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$.

2. D'après la question précédente, pour tout n entier naturel,

$$\begin{aligned} v_n &= \left(\frac{1}{5}\right)^n v_0 = \left(\frac{1}{5}\right)^n (u_0 - 10) \\ &= -6 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n. \end{aligned}$$

3. Ainsi, pour tout n entier naturel non nul,

$$u_n = v_n + 10 = -6 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n + 10.$$

□

Solution de l'exercice 9.

1. On résout l'équation :

$$\begin{aligned} &\ell = 2\ell + 1 \\ \Leftrightarrow\ &2\ell - \ell = -1 \\ \Leftrightarrow\ &\ell = -1. \end{aligned}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - \ell = (2u_n + 1) - (-1) \\ &= 2u_n + 1 + 1 = 2(u_n + 1) \\ &= 2v_n. \end{aligned}$$

Ainsi, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison 2 et, pour tout n entier naturel,

$$v_n = 2^n v_1 = 2^n(5+1) = 6 \times 2^n.$$

3. Alors, pour tout n entier naturel,

$$u_n = v_n + \ell = v_n - 1 = 6 \times 2^n - 1.$$

□

V.3 - Monotonie

Signe de $u_{n+1} - u_n$

Solution de l'exercice 10. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= (n+1+3)^2 + \frac{n+1}{4} - \left((n+3)^2 + \frac{n}{4}\right) \\ &= (n+4)^2 + \frac{n+1}{4} - (n+3)^2 - \frac{n}{4} \\ &= n^2 + 8n + 16 + \frac{n+1-n}{4} - (n^2 + 6n + 9) \\ &= 2n + 7 + \frac{1}{4} \geqslant 0. \end{aligned}$$

Ainsi, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. □

Solution de l'exercice 11. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= (2(n+1)+1)^2 - (2n+1)^2 \\ &= (2n+3)^2 - (2n+1)^2 \\ &= 4n^2 + 12n + 9 - (4n^2 + 4n + 1) \\ &= 8n + 8 \geqslant 0. \end{aligned}$$

Ainsi, la suite (u_n) est croissante. □

Utilisation d'une fonction auxiliaire

Solution de l'exercice 12.

1. La fonction f est dérivable et pour tout x réel positif,

$$f'(x) = \frac{1+2x}{1+x+x^2}.$$

Comme $x \geqslant 0$, alors $f'(x) \geqslant 0$ et la fonction f est croissante.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$\begin{aligned} n &\leqslant n+1 \\ f(n) &\leqslant f(n+1), \quad \text{car } f \text{ est croissante} \\ \ln(1+n+n^2) &\leqslant \ln(1+(n+1)+(n+1)^2) \\ u_n &\leqslant u_{n+1} \end{aligned}$$

Ainsi, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. $\square$

Solution de l'exercice 13.

1. La fonction f est dérivable sur $]-4,+\infty[$ et

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{4+x}} > 0.$$

Ainsi, la fonction f est croissante.

2. Montrons par récurrence que $u_n \leqslant u_{n+1}$ pour tout n entier naturel.
Initialisation. Lorsque $n = 0$.
D'une part, $u_0 = 1$.
D'autre part, $u_1 = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$.
Ainsi, $u_0 \leqslant u_1$.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $u_n \leqslant u_{n+1}$. Montrons que $u_{n+1} \leqslant u_{n+2}$.

$$\begin{aligned} u_n &\leqslant u_{n+1}, \quad \text{d'après l'H.R.}\\ f(u_n) &\leqslant f(u_{n+1}), \quad \text{car } f \text{ est croissante}\\ u_{n+1} &\leqslant u_{n+2} \end{aligned}$$

Conclusion. La propriété est vraie à l'ordre 0 et est héréditaire, donc

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\, u_n \leqslant u_{n+1}.$$

Ainsi, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. $\square$

Solution de l'exercice 14.

1. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$.
Comme

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\, u_{n+1} = \frac{u_n^2}{2} - u_n + \frac{3}{2},$$

en passant à la limite dans cette égalité,

$$\ell = \frac{\ell^2}{2} - \ell + \frac{3}{2}.$$

2. D'après la question précédente,

$$\begin{aligned} \frac{\ell^2}{2} - \ell + \frac{3}{2} &= \ell\\ \frac{\ell^2}{2} - 2\ell + \frac{3}{2} &= 0\\ \ell^2 - 4\ell + 3 &= 0. \end{aligned}$$

Le discriminant du trinôme $X^2 - 4X + 3$ vaut

$$(-4)^2 - 4 \times 3 = 16 - 12 = 4 = 2^2.$$

Ainsi, les valeurs possibles de ℓ sont

$$\frac{-(-4)-2}{2} = \frac{4-2}{2} = 1 \text{ et } \frac{-(-4)+2}{2} = \frac{422}{2} = 3.$$

Finalement, $\ell \in \{1, 3\}$. $\square$

V.4 - Théorème de la limite monotone

Suites récurrentes & Passage à la limite

Solution de l'exercice 15.

1. Pour tout x réel, $f(x) = 2x - x^2$. La fonction f est dérivable et, pour tout x réel,

$$f'(x) = 2 - 2x = 2(1-x).$$

Ainsi, $f'(x) \geqslant 0$ si et seulement si $x \leqslant 1$.
De plus, $f(1) = 1$ et, comme f est un polynôme,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (-x^2) = -\infty \text{ et } \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (-x^2) = -\infty.$$

On obtient ainsi le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

2. Montrer par récurrence que $0 \leqslant u_n \leqslant 1$ pour tout n entier naturel.
Initialisation. Lorsque $n = 0$. Comme $u_0 = \frac{1}{5}$, alors $0 \leqslant u_0 \leqslant 1$.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $0 \leqslant u_n \leqslant 1$. Montrons que $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.

$$\begin{aligned} 0 \leqslant u_n \leqslant 1, &\quad \text{d'après l'H.R.} f(0) \leqslant f(u_n) \leqslant f(1), \quad \text{car } f \text{ est croissante sur } [0,1] \\ 0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 1. \end{aligned}$$

Conclusion. La propriété est vraie à l'ordre 0 et est héréditaire, donc

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\, 0 \leqslant u_n \leqslant 1.$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après les définitions,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= u_n(2 - u_n) - u_n \\ &= u_n(2 - u_n - 1) \\ &= u_n(1 - u_n). \end{aligned}$$

Comme $u_n \in [0, 1]$, alors $u_n \geqslant 0$ et $1 - u_n \geqslant 0$. Ainsi, $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

4. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par 1. D'après le théorème de la limite monotone, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

5. Notons $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.
Comme, pour tout n entier naturel,

$$u_{n+1} = u_n(2 - u_n),$$

en passant à la limite dans l'égalité,

$$\begin{aligned} \ell &= \ell(2 - \ell) \\ \ell &= 2\ell - \ell^2 \\ \ell^2 - 2\ell + \ell &= 0 \\ \ell^2 - \ell &= 0 \\ \ell(\ell - 1) &= 0. \end{aligned}$$

Ainsi, $\ell = 0$ ou $\ell = 1$.

Comme $u_0 = \frac{1}{5}$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, alors

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\, u_n \geqslant \frac{1}{5}.$$

En passant à la limite dans l'inégalité, $\ell\frac{1}{5}$.
Ainsi, $\ell = 1$ et

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 1.$$

□

Solution de l'exercice 16.

1.
Initialisation. Lorsque $n = 0$. D'après la définition, $u_0 = 4$ et $u_1 = \frac{u_0^2}{5} = \frac{16}{4}$.
Comme $16 \leqslant 20$, alors $0 \leqslant u_0 \leqslant u_1$ et la propriété est vraie à l'ordre 0.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$. Montrons que $0 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$.

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant u_{n+1} \leqslant u_n, \quad \text{d'après l'H.R.} \\ 0^2 &\leqslant u_{n+1}^2 \leqslant u_n^2, \quad \text{car la fonction carré est croissante sur } \mathbb{R}_+ \\ 0 &\leqslant \frac{u_{n+1}^2}{5} \leqslant \frac{u_n^2}{5}, \quad \text{car } 5 \geqslant 0 \\ 0 &\leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1}. \end{aligned}$$

Conclusion. La propriété est vraie à l'ordre 0 et est héréditaire, donc

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\, 0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n.$$

2. D'après la question précédente, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0. D'après le théorème de la limite monotone, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

3. D'après la définition,

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\, u_{n+1} = \frac{u_n^2}{5}.$$

En passant à la limite dans cette égalité,

$$\begin{aligned} \ell &= \frac{\ell^2}{5} \\ \frac{\ell^2}{5} - \ell &= 0 \\ \ell\left(\frac{\ell}{5} - 1\right) &= 0. \end{aligned}$$

Ainsi, $\ell = 0$ ou $\ell = 5$.
Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et $u_0 = \frac{1}{5}$, alors

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant \frac{1}{5}.$$

En passant à la limite dans l'inégalité, $\ell \leqslant \frac{1}{5}$.
Ainsi, $\ell = 0$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. □

Avec un soupçon d'absurde

Solution de l'exercice 17.

1. On raisonne par récurrence sur n.
Initialisation. Lorsque $n = 0$, $u_0 = 1 > 0$ donc la propriété est vraie à l'ordre 0.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $u_n > 0$. Montrons que $u_{n+1} > 0$.
Comme $u_n > 0$, alors $\frac{1}{u_n}$ est bien défini. De plus, $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$ est la somme de deux nombres strictement positifs, donc est strictement positif.
Conclusion. La propriété est vraie à l'ordre 0 et est héréditaire, donc

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n > 0.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{u_n} > 0.$$

Ainsi, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

3. On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ.
Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $u_0 = 1$, alors en passant à la limite dans l'inégalité,

$$\begin{aligned} \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n &\geqslant 1, \\ \ell &\geqslant 1. \end{aligned}$$

Ainsi, en passant à la limite dans l'égalité suivante, comme $\ell \neq 0$, :

$$\begin{aligned} \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} &= u_n + \frac{1}{u_n} \\ \ell &= \ell + \frac{1}{\ell} \\ \frac{1}{\ell} &= 0. \end{aligned}$$

On obtient ainsi une contradiction et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas.

4. Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, d'après le théorème de la limite monotone, soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, soit elle tend vers $+\infty$.
D'après la question précédente, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas.
Ainsi,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.$$

□

Solution de l'exercice 18.

1. La fonction f est dérivable et pour tout x réel,

$$f'(x) = 2x + 1.$$

Ainsi, $f'(x) \geqslant 0$ si et seulement si $x \geqslant -1/2$.
Comme f est un polynôme dont on étudie la limite en l'infini,

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} x^2 + x - 3 &= \lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty, \\ \lim_{x\to-\infty} x^2 + x - 3 &= \lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty. \end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{1}{2}\right) &= \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} - 3 \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 3 = \frac{1 - 2 - 12}{3} \\ &= -\frac{13}{3}. \end{aligned}$$

On obtient ainsi le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{13}{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

2. Montrons par récurrence que $\sqrt{3} \leqslant u_n$ pour tout n entier naturel.
Initialisation. Lorsque $n = 0$. Alors, comme la fonction racine carrée est croissante,

$$u_0 = 3 = \sqrt{9} \geqslant \sqrt{3}.$$

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\sqrt{3} \leqslant u_n$. Montrons que $\sqrt{3} \leqslant u_{n+1}$.
Comme la fonction f est croissante sur $[\sqrt{3}, +\infty[$,

$$\begin{aligned}
\sqrt{3} &\leqslant u_n, \text{ d'après l'H.R.}\\
f(\sqrt{3}) &\leqslant f(u_n), \text{ par croissance de } f\\
(\sqrt{3})^2 + \sqrt{3} - 3 &\leqslant u_{n+1}\\
\sqrt{3} &\leqslant u_{n+1}.
\end{aligned}$$

Conclusion. La propriété est vraie à l'ordre 0 et est héréditaire, donc,

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \sqrt{3} \leqslant u_n.$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n = u_n^2 + u_n - 3 - u_n &= u_n^2 - 3\\
&\geqslant (\sqrt{3})^2 - 3\\
&\geqslant 0.
\end{aligned}$$

Ainsi, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
4. Comme $u_{n+1} = u_n^2 + u_n - 3$, si $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$, alors $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$ et, en passant à la limite dans l'égalité,

$$\ell = \ell^2 + \ell - 3.$$

Ainsi, $\ell^2 = 3$ et $\ell \in \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$.
Comme, pour tout n entier naturel, $u_n \geqslant \sqrt{3}$, alors $\ell\sqrt{3}$ et on en déduit que $\ell = \sqrt{3}$.
5. Supposons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ. D'après la question précédente, $\ell = \sqrt{3}$.
Or, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $u_0 = 3$. Ainsi, pour tout n entier naturel, $u_n \geqslant 3$ soit $\ell \geqslant 3$. Ainsi, $\sqrt{3} \geqslant 3$.
On obtient ainsi une contradiction. Ainsi, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.
D'après le théorème de la limite monotone, comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge, alors

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.$$

□

V.5 - Bijection monotone

Existence de solutions

Solution de l'exercice 19.

1. La fonction f est dérivable et

$$f'(x) = 2x^2 + 1.$$

Comme $f'(x) \geq 0$ la fonction f est strictement croissante. De plus, comme f est un polynôme,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty \text{ et } \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty.$$

On obtient ainsi le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

2.

Continuité. La fonction f est continue sur $[-2,-1]$.

Stricte monotonie. La fonction f est strictement croissante sur $[-2,-1]$.

Intervalle. $f(-2)=(-2)^3-2+5=-8-2+5=-5$ et $f(-1)=(-1)^3-1+5=3$ et $0\in[-5,3]$.

D'après le théorème de la bijection monotone il existe un unique réel $\alpha\in[-2,-1]$ tel que $f(\alpha)=0$. □

Solution de l'exercice 20.

1. La fonction f est dérivable et

$$f'(x)=-\frac{\mathrm{e}^x-(x+1)\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x)^2}=-\frac{\mathrm{e}^x-x\,\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}}=\frac{x\,\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}}.$$

Comme $x\geqslant 0$, alors $f'(x)\geqslant 0$ et s'annule uniquement en 0. Ainsi, la fonction f est strictement croissante.
D'après le théorème des croissances comparées,

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=3.$$

D'après les propriétés de la fonction exponentielle,

$$f(0)=3-\frac{0+1}{\mathrm{e}^0}=3-1=2.$$

On obtient ainsi le tableau de variations suivant :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	2 $\nearrow$	3

2.

Continuité. La fonction f est continue sur $[0,+\infty[$.

Stricte monotonie. La fonction f est strictement croissante sur $[0,+\infty[$.

Intervalle. $f(0)=2$, $\lim_{x\to+\infty}f(x)=3$ et $\frac{5}{2}=3$.

D'après le théorème de la bijection monotone il existe un unique réel $\alpha\in[0,+\infty[$ tel que $f(\alpha)=\frac{5}{2}$. □

Solution de l'exercice 21.

1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$f'(x)=\mathrm{e}^x+1.$$

Comme la fonction exponentielle est à valeurs strictement positives, $f'(x)\geq 0$ et la fonction f est strictement croissante.
D'après les théorèmes d'addition des limites,

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty \text{ et } \lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty.$$

On obtient ainsi le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$	$+\infty$

2.

Continuité. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

Stricte monotonie. La fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Intervalle. Comme $\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ et $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, alors $0\in]-\infty,+\infty[$.

D'après le théorème de la bijection monotone, il existe un unique réel α tel que $f(\alpha)=0$.

3. On remarque que $f(0)=\mathrm{e}^0+0-2=-1$ et $f(1)=\mathrm{e}^1+1-2=\mathrm{e}-1\geq 0$. Ainsi, $f(\alpha)=0\in[f(0),f(1)]$. Comme f est croissante, alors $\alpha\in[0,1]$.

4. Soit $x\in\mathbb{R}$ tel que $\mathrm{e}^x=-x+2$. On remarque que

$$\begin{aligned}&\mathrm{e}^x=-x+2\\ \Leftrightarrow\ &\mathrm{e}^x+x-2=0\\ \Leftrightarrow\ &f(x)=0.\end{aligned}$$

Or, d'après la question précédente, il existe un unique réel α tel que $f(\alpha) = 0$. Ainsi, $x = \alpha$ et l'équation $\mathrm{e}^x = -x + 2$ admet α comme unique solution. □

Construction de solutions approchées

Solution de l'exercice 22.

1.

`b - a > 0.25`	`m`	`f(a) * f(m) <= 0`	`a`	`b`
			0	3
`True`	1.5	`True`	0	1.5
`True`	0.75	`False`	0.75	1.5
`True`	1.125	`False`	1.125	1.5
`True`	1.3125	`False`	1.3125	1.5
`False`				

Le programme affiche alors `1.3125`.

2. La valeur renvoyée est une valeur approchée d'une solution de l'équation $x^2-2 = 0$ appartenant à $[0, 3]$, soit une valeur approchée de $\sqrt{2}$. □

Solution de l'exercice 23.

1. On remarque que $\mathrm{e}^x = 2$ si et seulement si $x = \ln(2)$.

2. L'algorithme est un algorithme de dichotomie. Il permet de donner une valeur approchée à 10^{-5} près d'une solution de l'équation $f(x) = 0$. Ainsi, l'algorithme affiche une approximation à 10^{-5} près de $\ln(2)$. □

Solution de l'exercice 24.

1. La fonction f est dérivable et

$$\begin{aligned} f'(x) &= (-2x+1)\,\mathrm{e}^{-x} + (-x^2+x-1)\left(-\mathrm{e}^{-x}\right) \\ &= \mathrm{e}^{-x}\left(-2x+1+x^2-x+1\right) \\ &= (x^2-3x+2)\,\mathrm{e}^{-x}. \end{aligned}$$

Le discriminant du trinôme $x^2 - 3x + 2$ vaut

$$(-3)^2 - 4 \times 2 = 9 - 8 = 1.$$

Ainsi, les solutions de l'équation $x^2 - 3x + 2 = 0$ sont

$$\frac{3-1}{2} = 1 \text{ et } \frac{3+1}{2} = 2.$$

D'après le théorème des croissances comparées,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (2 - x^2\,\mathrm{e}^{-x}) = -\infty$$

et

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (2 - x^2\,\mathrm{e}^{-x}) = 2.$$

De plus,

$$f(1) = 2 + (-1+1-1)\,\mathrm{e}^{-1} = 2 - \mathrm{e}^{-1}$$

et

$$f(2) = 2 + (-4+2-1)\,\mathrm{e}^{-2} = 2 - 3\,\mathrm{e}^{-2}.$$

On obtient ainsi le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$2-\frac{1}{\mathrm{e}}$	$\searrow$	$2-\frac{3}{\mathrm{e}^2}$	$\nearrow$	2

2.

Continuité. La fonction f est continue sur $[-1, 0]$.
Stricte monotonie. La fonction f est strictement croissante sur $[-1, 0]$.
Intervalle. D'une part,

$$f(-1) = 2 + (-1-1-1)\,\mathrm{e}^{1} = 2 - 3\,\mathrm{e} \leq 0.$$

D'autre part, $f(0) = 2 - 1 = 1 \geq 0$.
Ainsi, $0 \in [f(-1), f(0)]$.

D'après le théorème de la bijection monotone, il existe un unique réel $\alpha \in [-1, 0]$ tel que $f(\alpha) = 0$.

3.

```
import numpy as np

def f(x):
    return 2 + (-x**2 + x - 1) np.exp(-x)

a = -1
b = 0
while b - a > 10**(-4):
    m = (a + b) / 2
    if f(a) * f(m) > 0:
        a = m
    else:
        b = m

print(a)
```

□