Devoir en temps libre

À rendre le lundi 16/09/2024

■ ■ ■

Il convient de traiter en priorité la **Partie 1**. Les questions **8.a)** et **8.c)** ne pourront être traitées qu'une fois que le cours de seconde année sur les intégrales aura été effectué car elles utilisent la formule d'intégration par parties.

Exercice 1.

Partie 1

Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln(1 + \mathrm{e}^x)$.
On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Jusitifier que l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$.
On admet que f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

2. Vérifier que $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$.
En déduire la monotonie de f sur $\mathbb{R}$.

3. Calculer la limite de f en $-\infty$.
$\mathscr{C}_f$ admet-elle une asymptote ? Si oui, donner l'équation de cette asymptote.

4. a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

b) Démontrer que $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x + \ln(1 + \mathrm{e}^{-x})$.

c) En déduire que la droite (D) d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$.

d) Étudier le signe de $f(x) - x$ pour tout réel x, et en déduire la position relative de (D) par rapport à $\mathscr{C}_f$.

5. Déterminer l'équation de la tangente (T_0) à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.

6. a) Dresser le tableau de variations de f en précisant les limites aux bournes et la valeur en 0.

b) Tracer sur un même repère l'allure de la courbe $\mathscr{C}_f$, les droites (D) et (T_0).
On admet qu'une valeur approchée de $\ln(2)$ *est* 0,69.

Partie 2

Pour tout entier naturel n, on pose pour tout réel x de $[0, 1]$, $g_n(x) = \ln(1+\mathrm{e}^{-nx})$ et $I_n = \displaystyle\int_0^1 g_n(x)\,\mathrm{d}x$.

7. a) Montrer que $\forall\, x \in [0, 1]$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $g_{n+1}(x) \leqslant g_n(x)$.

b) En déduire que la suite $(I_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante.

c) Montrer que la suite $(I_n)_{n\geqslant 0}$ est convergente.

8. a) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout entier naturel n,

$$I_n = \ln(1 + \mathrm{e}^{-n}) + n \int_0^1 \frac{x\,\mathrm{e}^{-nx}}{1 + \mathrm{e}^{-nx}}\,\mathrm{d}x.$$

b) Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant I_n \leqslant \ln(1 + \mathrm{e}^{-n}) + n \displaystyle\int_0^1 x\,\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x$.

c) Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $\displaystyle\int_0^1 x\,\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{e}^{-n}}{n} + \frac{1 - \mathrm{e}^{-n}}{n^2}$.

d) En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

9. a) Écrire une fonction en langage Python, nommée `gn`, prenant en entrée un entier naturel non nul `n` et un réel `x` et renvoyant $g_n(x)$.

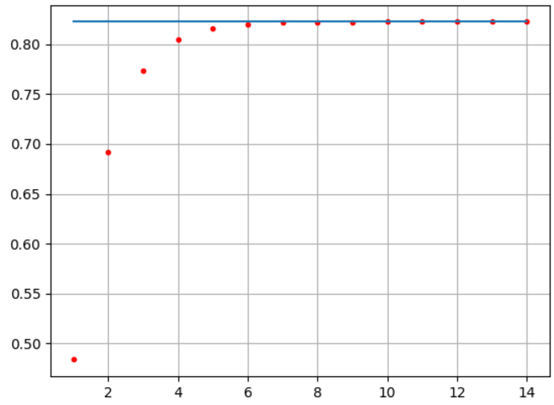
b) On dispose d'une fonction en langage Python nommée `I` prenant en entrée un entier naturel non nul `n` et renvoyant une valeur approchée de I_n à 10^{-7} près. On exécute le code suivant :

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

L_x = np.zeros(14)
L_y = np.zeros(14)
for n in range(14):
    L_x[n] = n + 1
    L_y[n] = (n + 1) * I(n + 1)

plt.plot(L_x, L_y, '.r')
plt.plot([1, 14], [np.pi**2/12, np.pi**2/12])
plt.show()
```

On obtient la figure ci-dessous :



Que peut-on conjecturer sur la suite $(nI_n)_{n\geqslant 1}$?