Lycée Ozenne
DL n°03

Devoir en temps libre

À rendre le lundi 23/09/2024

ECT 2
16/09/2024

■ ■ ■

Exercice 1.

1. Justifier que pour tout réel x on a : $x^2+x+1>0$.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\ln(x^2+x+1)$. On note $\mathscr{C}$ sa courbe dans un repère orthonormé $(O,\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath})$.

2. Rappeler la valeur de $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)$. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$.

3. Vérifier que $f\left(-\frac{1}{2}\right)=\ln(3)-2\ln(2)$.

4. a) Justifier que pour tout réel x on a : $f'(x)=\frac{2x+1}{x^2+x+1}$.

b) Dresser le tableau des variations de f sur $\mathbb{R}$ en y faisant figurer les éléments obtenus aux questions **2** et **3**.

5. a) Montrer, en la résolvant, que l'équation $f(x)=0$ d'inconnue x admet exactement deux solutions : -1 et 0.

b) Justifier que la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 a pour équation $y=x$.
Déterminer une équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse -1.

6. a) Calculer la dérivée seconde de f et vérifier que pour tout réel x on a : $f''(x)=\frac{-2x^2-2x+1}{(x^2+x+1)^2}$.

b) Étudier la convexité de f sur $\mathbb{R}$. Vérifier que $\mathscr{C}$ admet exactement deux points d'inflexions aux points d'abscisses $\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$ et $\frac{-1-\sqrt{3}}{2}$.

7. a) Justifier, sans la résoudre, que l'équation $f(x)=1$ admet exactement une solution α dans $[0,+\infty[$.

b) On donne $\ln(3)\simeq 1{,}1$. Vérifier que $\alpha\in[0,1]$.

c) Vérifier que $f(-1-\alpha)=1$.

d) Recopier et compléter l'algorithme suivant afin qu'il permette de calculer puis afficher une valeur approchée de α à 10^{-3} près par dichotomie.

```
import numpy as np

def f(x):
    return ...

a = 0
b = ...
while b - a > 10**(-3)
    c = ...
    if f(c) < 1:
        a = ...
    else:
        b = ...

print(...)
```

e) On donne les valeurs suivantes : $\alpha\simeq 0{,}9$; $f\left(-\frac{1}{2}\right)\simeq -0{,}3$; $\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\simeq 0{,}4$ et $\frac{-1-\sqrt{3}}{2}\simeq -1{,}4$.
Tracer l'allure de la courbe $\mathscr{C}$ ainsi que les tangentes obtenues en **5.b)**.