■ ■ ■

La question **4.a)** ne peut pas être traitée pour le moment. Vous pourrez la remplacer par : « Vérifier que $P \times P^{-1} = I$. »

Exercice 1. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par ses deux premiers termes $u_0 = 1$ et $u_1 = 2$ ainsi que la relation :

$$\text{pour tout entier naturel } n,\ u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n.$$

Soit les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{4} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et, pour tout entier naturel n, $U_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.

1. a) Montrer que pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = AU_n$.

b) Établir, par récurrence, que pour tout entier naturel n, $U_n = A^n U_0$.

2. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

a) Vérifier que $AP = PT$.

b) Établir que pour tout entier naturel n, $A^n P = PT^n$.

3. On pose $B = T - \frac{1}{2}I$.

a) Donner les quatre coefficients de B puis calculer B^2.
Donner B^k pour tout $k \geqslant 2$.

b) En utilisant la formule du binôme, montrer que : $\forall\, n \geqslant 1$, $T^n = \frac{1}{2^n}I + \frac{n}{2^{n-1}}B$.
Cette formule est-elle aussi vraie pour $n = 0$?

c) En déduire, pour tout entier naturel n, les quatre coefficients de T^n.

4. a) Justifier que P est inversible et vérifier que : $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

b) Déduire des questions précédentes, pour tout entier naturel n, les quatre coefficients de A^n.

5. Déterminer, pour tout entier naturel n, une expression de u_n en fonction de n.