Devoir en temps libre

À rendre le lundi 07/10/2024

■ ■ ■

Les questions suivantes ne peuvent pas être traitées en l'état actuel de vos connaissances. Vous pouvez les passer sans que cela affecte les questions suivantes : **1.b)**, **1.c)**, deuxième partie de la question **1.d)**.

Exercice 1. On considère les matrices suivantes de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. a) Calculer J^2 puis vérifier que $J^3 = 2J$.

b) En déduire les valeurs propres possibles de J.

c) Vérifier que les colonnes de la matrice P sont des vecteurs propres de J.

d) On pose $D_1 = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$. Montrer que $JP = PD_1$ et en déduire que J est diagonalisable.

e) En déduire que $J^2P = PD_1^2$.

Dans toute la suite de l'exercice, on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

2. a) Vérifier que $K = J^2 - I$.

b) Montrer qu'il existe des réels a, b, c tels que $A = aI + bJ + cK$.

c) En déduire que $A = J^2 + 2J$ puis établir l'existence d'une matrice diagonale D_2 que l'on explicitera, telle que $AP = PD_2$.

3. a) Compléter le script suivant pour que la fonction `A_puissance_n(n)` renvoie A^n :

```python
import numpy as np

def A_puissance_n(n):
    A = ...
    B = np.eye(3)
    for i in range(1,...):
        B = np.dot(..., ...)
    return ....
```

b) Pour $n = 2$, le script précédent affiche $A^2 = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 6 \\ 8 & 12 & 8 \\ 6 & 8 & 6 \end{pmatrix}$.

Pour $n = 3$, le script précédent affiche $A^3 = \begin{pmatrix} 28 & 40 & 28 \\ 40 & 56 & 40 \\ 28 & 40 & 28 \end{pmatrix}$.

Pour $n = 5$, donner, sans calculer A^5, un argument permettant de préciser laquelle des deux matrices B_1 ou B_2 suivantes est renvoyée par le script :

$$B_1 = \begin{pmatrix} 656 & 928 & 656 \\ 928 & 1312 & 928 \\ 656 & 928 & 656 \end{pmatrix} \qquad B_2 = \begin{pmatrix} 656 & 928 & 656 \\ 928 & 1324 & 928 \\ 656 & 928 & 656 \end{pmatrix}.$$