Devoir en temps libre

À rendre le lundi 14/10/2024

■ ■ ■

Exercice 1. On rappelle que $\mathrm{e} = \mathrm{e}^1 \simeq 2{,}7$.
On considère la fonction f définie sur $D =]0,1[\cup]1,+\infty[$ par :

$$\forall\, x \in D,\ f(x) = \frac{x}{\ln(x)}$$

ainsi que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 3 \text{ et } \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) = \frac{u_n}{\ln(u_n)}.$$

1. Calculer les limites suivantes : $\lim_{x\to 0^+} f(x)$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ et $\lim_{x\to 1^+} f(x)$.

2. Pour $x \in D$, calculer $f'(x)$ puis justifier que $f'(x)$ est du même signe que $\ln(x) - 1$.

3. a) Dresser le tableau de variations de f sur D en le complétant par les limites de f aux bornes de D.

b) Montrer que f réalise une bijection de $[\mathrm{e}, +\infty[$ sur $[\mathrm{e}, +\infty[$.

4. a) Résoudre l'équation $f(x) = x$ d'inconnue x pour $x \in D$.

b) Donner le signe de $f(x) - x$ lorsque $x \in D$.

5. a) Prouver par récurrence que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant \mathrm{e}\,.$$

b) Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

c) Démonter que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge puis que $\lim_{n\to+\infty} u_n = \mathrm{e}$.

6. a) Montrer que :

$$\forall\, x \in [\mathrm{e}, +\infty[,\ f'(x) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(1 - \frac{2}{\ln(x)}\right)^2.$$

b) En déduire que :

$$\forall\, x \in [\mathrm{e}, +\infty[,\ \left|f'(x)\right| \leqslant \frac{1}{4}.$$

7. On admettra que

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - \mathrm{e}| \leqslant \frac{1}{4}\,|u_n - \mathrm{e}|\,.$$

a) En déduire que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ |u_n - \mathrm{e}| \leqslant \frac{1}{4^n}.$$

b) Retrouver ainsi la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.