Devoir en temps libre

À rendre le lundi 04/11/2024

■ ■ ■

Exercice 1. Partie I : Calcul matriciel

On considère les trois matrices $M = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = QMQ$.

1. Calculer $Q \times Q$. En déduire que Q est inversible et expliciter Q^{-1}.

2. Calculer D (on vérifiera que D est une matrice diagonale).
Justifier que $M = QDQ$.

3. Démontrer par récurrence que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\, M^n = QD^nQ$.

4. Expliciter les neuf coefficients de la matrice M^n.

Partie II : Étude d'une expérience

On dispose de 2 pièces de monnaie équilibrées, c'est-à-dire que la probabilité d'avoir Pile en lançant l'une de ces pièces vaut $\frac{1}{2}$.

On effectue des lancers successifs selon le protocole suivant :

- à l'étape 1, on lance les 2 pièces.
- à l'étape 2, on lance les pièces ayant amené Pile à l'étape 1 (s'il en existe),
- à l'étape 3, on lance les pièces ayant amené Pile à l'étape 2 (s'il en existe),

et ainsi de suite. On suppose que les lancers successifs éventuels d'une même pièce sont indépendants et que les deux pièces sont indépendantes l'une de l'autre.

On considère, pour tout entier naturel n non nul, les événements :

- A_n : « obtenir 0 Pile à l'étape n »,
- B_n : « obtenir 1 Pile à l'étape n »,
- C_n : « obtenir 2 Piles à l'étape n »,

et on note $a_n = \mathbf{P}(A_n)$, $b_n = \mathbf{P}(B_n)$ et $c_n = \mathbf{P}(C_n)$.

5. Calculer a_1, b_1 et c_1.

6. Soit n un entier naturel non nul. Calculer les trois probabilités conditionnelles $\mathbf{P}_{A_n}(A_{n+1})$, $\mathbf{P}_{B_n}(A_{n+1})$ et $\mathbf{P}_{C_n}(A_{n+1})$.
Un argumentaire est attendu pour expliquer les valeurs de chacune de ces probabilités.

7. À l'aide de la formule des probabilités totales, prouver que :

$$\forall\, n \geqslant 1,\ \begin{cases} a_{n+1} & = a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{4}c_n, \\ b_{n+1} & = \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}c_n, \\ c_{n+1} & = \frac{1}{4}c_n. \end{cases}$$

8. a) Vérifier que :

$$\forall\, n \geqslant 1,\ \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix},$$

où la matrice M a été définie dans la partie I.

b) Démontrer, par récurrence, que :

$$\forall\, n \geqslant 1,\ \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = M^{n-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}.$$

9. a) En déduire que :

$$\forall\, n \geqslant 1,\ \mathbf{P}(A_n) = 1 + \frac{1}{4^n} - \frac{2}{2^n},\ \mathbf{P}(B_n) = \frac{2}{2^n} - \frac{2}{4^n},\ \mathbf{P}(C_n) = \frac{1}{4^n}.$$

b) Vérifier que la somme de ces trois probabilités est égale à 1 et donner la limite de chacune d'elles.