Devoir en temps libre

À rendre le lundi 04/11/2024

■ ■ ■

Exercice 1. On pose $u_1 = \frac{1}{2}$ et, pour tout entier naturel n non nul :

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2(n+1)u_n + 1}.$$

1. a) Montrer que l'on définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de nombres réels strictement positifs.
On pourra procéder par récurrence sur n en montrant que, pour tout entier naturel n, le réel u_n est bien défini et strictement positif.

b) Compléter la fonction Python ci-dessous pour qu'elle renvoie la valeur de u_n à l'appel de `suite(n)`.

```
def suite(n):
    u = 1/2
    for k in range(2, n+1):
        u = ......
    return u
```

2. Donner la valeur de u_2, puis vérifier que $u_3 = \frac{1}{12}$.

3. a) Utiliser la définition de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ pour établir l'encadrement :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ 0 < u_{n+1} < \frac{1}{2(n+1)}.$$

b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et donner sa limite.

4. Pour tout entier naturel k non nul, on pose : $v_k = \frac{1}{u_k}$.

a) Établir l'égalité :

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*,\ v_{k+1} - v_k = 2(k+1).$$

b) La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est-elle arithmétique ? Justifier.

c) Par sommation de l'égalité obtenue à la question **4.a)**, établir la relation :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = n(n+1).$$

d) En déduire explicitement u_n en fonction de n puis retrouver la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

5. a) Déterminer les constantes a et b pour lesquelles, pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$u_n = \frac{a}{n} - \frac{b}{n+1}.$$

b) Pour tout entier naturel N supérieur ou égal à 1, calculer la somme $\sum\limits_{n=1}^{N} u_n$.

c) En déduire que la série de terme général u_n converge et donner sa somme.

6. a) Expliquer pourquoi on peut maintenant considérer une variable aléatoire X dont la loi est donnée par la relation :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbf{P}\left([X = n]\right) = u_n.$$

b) Soit n un entier supérieur ou égal à 1. Montrer que

$$\int_{n+1}^{n+2} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

c) En déduire l'égalité :
$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+1} \geqslant \ln(N+2) - \ln(2).$$

d) Montrer alors que X ne possède pas d'espérance.

Exercice 2. Partie A : Calcul matriciel et suites

On considère les matrices carrées d'ordre 3 suivantes :
$$M = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \text{ et } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On considère également les suites numériques $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}, (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :
$$a_0 = 1, b_0 = 0, c_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \begin{cases} a_{n+1} &= \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{4}c_n \\ b_{n+1} &= \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{4}c_n \\ c_{n+1} &= \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{2}c_n \end{cases}$$

On note enfin pour tout entier naturel n, la matrice colonne : $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

1. a) Calculer le produit matriciel PQ,

b) En déduire que P est inversible et déterminer P^{-1}.

2. a) Vérifier que : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = MX_n$.

b) Démontrer par récurrence que : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $X_n = M^n X_0$.

3. a) Vérifier que $(4M - I)(4M - 4I)$ est la matrice nulle.

b) En déduire les valeurs propres possibles de la matrice M.

4. a) Déterminer la matrice diagonale D telle que $M = PDP^{-1}$.

b) Donner sans démonstration, pour tout entier naturel n, l'expression de M^n en fonction des matrices D, P et P^{-1}.

c) Vérifier que pour tout entier naturel n, on a :
$$M^n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1+2\left(\frac{1}{4}\right)^n & 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n & 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n \\ 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n & 1+2\left(\frac{1}{4}\right)^n & 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n \\ 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n & 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n & 1+2\left(\frac{1}{4}\right)^n \end{pmatrix}.$$

d) Justifier que pour tout entier naturel n, $\begin{cases} a_n &= \dfrac{1}{3}\left(1 + \dfrac{2}{4^n}\right) \\ b_n = c_n &= \dfrac{1}{3}\left(1 - \dfrac{1}{4^n}\right) \end{cases}$.

e) En déduire les limites des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

f) Compléter le script **Python** ci-dessous afin qu'il calcule et affiche le plus petit entier naturel n tel que l'on ait à la fois : $a_n \leqslant 0{,}334$ et $b_n \geqslant 0{,}333$.

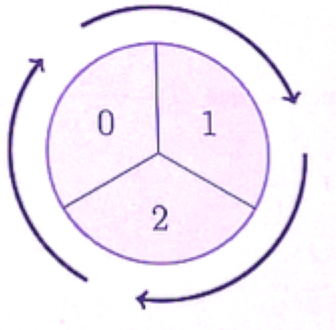
```
n = 0
a = 1
b = ...
while ...:
    n = ...
    a = 1/3 * (1 + 2/4**n)
    b = ...

print(.......)
```

Partie B : Application à un jeu de hasard

On suppose qu'un joueur déplace un pion sur les trois cases d'une roue de loterie partagée en tiers numérotés 0, 1 et 2, dans le sens des aiguilles d'une montre (c'est-à-dire dans le sens de la flèche indiquée), selon le protocole suivant :

- au début du jeu, le pion est sur la case 0 ;
- à chaque coup le joueur tire de façon équiprobable un chiffre k de l'ensemble $\{0,1,2,3\}$ et avance son pion de k cases, en tournant dans le sens des aiguilles d'une montre.

Ainsi, par exemple, s'il tire le chiffre 3, il avance son pion de 3 cases ; s'il tire le chiffre 0 , il reste sur place.



On note, pour tout entier naturel n, les événements :

- A_n : " à l'issue du $n^{\text{ième}}$ coup, le pion est sur la case 0 ",
- B_n : " à l'issue du $n^{\text{ième}}$ coup, le pion est sur la case 1 ",
- C_n : " à l'issue du $n^{\text{ième}}$ coup, le pion est sur la case 2 ".

On convient que A_0 est l'événement certain et que B_0 et C_0 sont des événements impossibles.

5. Donner les valeurs des probabilités $\mathbf{P}(A_0)$, $\mathbf{P}(B_0)$, $\mathbf{P}(C_0)$, $\mathbf{P}(A_1)$, $\mathbf{P}(B_1)$ et $\mathbf{P}(C_1)$.

6. a) Expliquer pourquoi $\mathbf{P}_{A_n}(A_{n+1}) = \dfrac{1}{2}$. Donner les valeurs de $\mathbf{P}_{B_n}(A_{n+1})$ et $\mathbf{P}_{C_n}(A_{n+1})$.

b) À l'aide de la formule des probabilités totales, exprimer pour tout entier naturel n, les probabilités des événements $A_{n+1}, B_{n+1}, C_{n+1}$ en fonction des probabilités des événements A_n, B_n, C_n.

c) En déduire que les probabilités $\mathbf{P}(A_n)$, $\mathbf{P}(B_n)$ et $\mathbf{P}(C_n)$ sont données par les valeurs de a_n, b_n et c_n obtenues dans la **Partie A**.

7. Interpréter alors le résultat de la question **4.e)** obtenu dans la **Partie A**.