■ ■ ■

Exercice 1. On considère une urne U contenant deux boules blanches et une boule noire indiscernables au toucher ainsi qu'une urne V contenant une boule blanche et trois boules noires, elles aussi indiscernables au toucher. On effectue une suite de tirages d'une boule dans ces urnes en procédant comme suit :

- le premier tirage a lieu dans l'urne U ;
- tous les tirages s'effectuent avec remise de la boule piochée dans l'urne dont elle provient ;
- si l'on pioche une boule **blanche** lors d'un tirage, le tirage suivant a lieu dans **l'autre** urne ;
- si l'on pioche une boule **noire** lors d'un tirage, le tirage suivant a lieu dans **la même** urne.

Partie I - Étude de l'urne du n^{e} tirage

Pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, on note U_n l'événement « le n^{e} tirage s'effectue dans l'urne U ». Puisque le premier tirage a lieu dans l'urne U, l'événement U_1 est certain : $\mathbf{P}(U_1) = 1$.

1. Calculer $\mathbf{P}(U_2)$.

2. Donner les valeurs de $\mathbf{P}_{U_2}(U_3)$ et de $\mathbf{P}_{\overline{U_2}}(U_3)$.
En déduire $\mathbf{P}(U_3)$.

3. a) Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, que valent $\mathbf{P}_{U_n}(U_{n+1})$ et $\mathbf{P}_{\overline{U_n}}(U_{n+1})$?

b) En déduire que pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$:

$$\mathbf{P}(U_{n+1}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{12}\mathbf{P}(U_n).$$

c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue α :

$$\alpha = \frac{1}{4} + \frac{1}{12}\alpha.$$

d) Déterminer alors la valeur de $\mathbf{P}(U_n)$ en fonction de n.

e) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{P}(U_n)$.

Partie II - Étude du nombre de boules blanches

Pour tout entier naturel non nul n, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches piochées au cours des n premiers tirages.

4. Déterminer la loi de X_1.

5. a) Donner les valeurs de :

$$\mathbf{P}_{[X_1=0]}(X_2 = 0), \mathbf{P}_{[X_1=0]}(X_2 = 1), \mathbf{P}_{[X_1=1]}(X_2 = 1) \text{ et } \mathbf{P}_{[X_1=1]}(X_2 = 2).$$

b) En déduire la loi de X_2.

c) Vérifier que $\mathbf{E}[X_2] = \frac{19}{18}$.

6. On rappelle que si le module `numpy.random` est importé via l'instruction `import numpy.random as rd`, l'instruction `rd.randint(1, k+1)` renvoie un entier aléatoire compris entre 1 et `k`. Recopier et compléter les lignes à pointillés du script ci-dessous afin qu'il simule la variable aléatoire X_2 :

```python
import numpy.random as rd

def simulation():
    tirage1 = rd.randint(1, 4)
    if tirage1 < 3:
        res1 = 1
        tirage2 = rd.randint(1, 5)
        if tirage2 == 1:
            res2 = 1
        else:
            res2 = 0
    else:
        res1 = 0
        tirage2 = ........
        if tirage2 < 3:
            res2 = .......
        else:
            res2 = ...
    return res1 + res2
```

7. Pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, déterminer $X_n(\Omega)$.
Pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, calculer $\mathbf{P}(X_n = 0)$.

8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Expliquer pourquoi après avoir obtenu au cours des n premiers tirages un nombre pair de boules blanches, le tirage de la $(n+1)^{\text{e}}$ boule s'effectuera dans U.

On admettra de même qu'après avoir obtenu au cours des n premiers tirages un nombre impair de boules blanches, le tirage de la $(n+1)^e$ boule s'effectuera dans V.

9. À l'aide de la formule des probabilités totales, démontrer que pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$:

$$\mathbf{P}(X_{n+1} = 1) = \frac{3}{4} \times \mathbf{P}(X_n = 1) + \frac{2}{3} \times \mathbf{P}(X_n = 0) \qquad (R_1)$$

10. Pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n \times \mathbf{P}(X_n = 1)$.
Déduire du résultat de (R_1), que pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$:

$$u_{n+1} = u_n + \frac{8}{9} \times \left(\frac{4}{9}\right)^n.$$

11. a) Montrer par récurrence que pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$:

$$u_n = \frac{8}{5}\left(1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n\right).$$

b) En déduire, pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, la valeur de $\mathbf{P}(X_n = 1)$ en fonction de n.

c) Déterminer $\lim_{n \to +\infty} \mathbf{P}(X_n = 1)$.