Devoir en temps libre

À rendre le lundi 16/12/2024

■ ■ ■

Exercice 1. Dans tout l'exercice, on note n un entier supérieur ou égal à 1 et $\overline{A}$ l'événement contraire d'un événement A.
On suppose que dans une certaine région, pendant une période donnée, seuls deux états météo sont possibles : le beau temps et le mauvais temps.
L'étude des bulletins météo du passé laisse penser que le temps qu'il fait un certain jour de cette période dépend du temps qu'il a fait la veille de la façon suivante :

- s'il fait beau un jour donné, la probabilité qu'il fasse beau le lendemain est égale à $\frac{4}{5}$;
- s'il fait mauvais un jour donné, la probabilité qu'il fasse mauvais le lendemain est égale à $\frac{2}{5}$.

On s'intéresse à une période débutant le jour 1, jour au cours duquel il a fait beau.
Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note :

- B_n l'événement : « il fait beau le jour n » ;
- $\overline{B_n}$ l'événement : « il fait mauvais le jour n » ;
- $u_n = \mathbf{P}(B_n)$ et $v_n = \mathbf{P}\left(\overline{B_n}\right)$.

1. a) Donner la valeur de u_1.

b) Déterminer les probabilités conditionnelles $\mathbf{P}_{B_n}(B_{n+1})$ et $\mathbf{P}_{\overline{B_n}}(B_{n+1})$.

2. a) À l'aide de la formule des probabilités totales, établir la relation :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = \frac{4}{5}u_n + \frac{3}{5}v_n.$$

b) En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_{n+1} en fonction de u_n.

c) Déterminer le réel ℓ tel que $\ell = \frac{\ell}{5} + \frac{3}{5}$ puis la nature de la suite de terme général $w_n = u_n - \ell$.

d) Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'expression de u_n en fonction de n.

e) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ et interpréter ce résultat.

3. a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $v_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{2}{5}v_n$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n la matrice à une ligne et deux colonnes suivante : $X_n = \begin{pmatrix} u_n & v_n \end{pmatrix}$.
Déterminer la matrice carrée K, indépendante de n, qui vérifie la relation suivante :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ X_{n+1} = X_n K.$$

c) À l'aide d'un raisonnement par récurrence, donner pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'expression de X_{n+1} en fonction de X_1 et K.

d) En déduire l'expression (sous forme de tableau) de la matrice K^n en fonction de n.

4. a) Soit U_n l'événement « il fait beau pendant les n premiers jours de la période considérée ». Calculer $\mathbf{P}(U_n)$.

b) Soit V_n l'événement « il fait beau au moins deux fois lors des n premiers jours de la période considérée ». Calculer $\mathbf{P}(V_n)$.