Devoir en temps libre

À rendre le lundi 06/01/2025

■ ■ ■

Exercice 1. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 & = \frac{1}{2} \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\, u_{n+1} & = u_n(1-u_n) \end{cases}$$

ainsi que la fonction f définie sur $[0,1]$ par $f(t) = t(1-t)$.

1. a) Établir le tableau de variations de f.

b) Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$.

c) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone et convergente. On note ℓ sa limite.

d) Justifier que (u_{n+1}) converge à la fois vers ℓ et vers $\ell(1-\ell)$. En déduire $\ell = 0$.

2. On définit pour tout entier naturel non nul n : $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} u_k^2$.

a) Pour tout entier naturel k, exprimer $u_k - u_{k+1}$ en fonction de u_k.

b) Montrer que pour tout entier naturel non nul n : $S_n = \frac{1}{2} - u_n$.

c) On note pour tout entier naturel k : $p_k = 2u_k^2$.
Montrer que la suite $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une loi de probabilité.

Exercice 2. On dispose d'un dé cubique classique équilibré et d'une pièce équilibrée. On lance le dé et on observe le résutlat :

- si celui-ci est un 6, on lance la pièce deux fois.
- dans tous les autres cas, on lance la pièce une seule fois.

On note X la variable aléatoire égale au résultat du dé.
On note Y la variable aléatoire égale au nombre de Piles apparus au cours de cette expérience.

1. a) Justifier que X suit une loi uniforme que l'on précisera en détail.

b) Donner l'espérance $\mathbf{E}[X]$ et la variance $\mathbf{V}(X)$.

2. Montrer que $\mathbf{P}([Y=2]) = \mathbf{P}([Y=2]\cap[X=6]) = \frac{1}{24}$.

3. a) Montrer que pour $k \in \{1,2,3,4,5\}$, $\mathbf{P}_{[X=k]}([Y=0]) = \frac{1}{2}$.

b) Que vaut $\mathbf{P}_{[X=6]}([Y=0])$? En déduire en utilisant la formule des probabilités totales que $\mathbf{P}([Y=0]) = \frac{11}{24}$.

c) Donner finalement la loi de la variable Y et calculer son espérance.

4. a) Recopier et compléter les cases du tableau suivant afin qu'il fournisse la loi du couple (X,Y) (Aucune justification supplémentaire n'est demandée).

$Y \backslash X$	1	2	3	4	5	6
0						
1						
2						

b) Calculer alors la covariance de X et Y.