■ ■ ■

**Exercice 1.** On considère la fonction $f$ définie, pour tout réel $x$ de $[0,+\infty[$, par la relation : $f(x) = \frac{x}{(x+1)^2}$.

**1. a)** On note $f'$ la dérivée de $f$. Calculer, pour tout réel $x$ positif, $f'(x)$.

**b)** Étudier, suivant les valeurs de $x$, le signe de $f'(x)$.

**c)** Déterminer la limite de $f(x)$ quand $x$ vers $+\infty$.

**d)** Dresser le tableau de variation de $f$.

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 1$ et la relation : pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

**2. a)** Calculer $u_1$ et $u_2$.

**b)** Montrer par récurrence que, pour tout entier $n$ supérieur ou égal à 1, on a : $0 < u_n \leqslant \frac{1}{n}$.

**c)** Montrer que la suite $(u_n)$ converge et déterminer sa limite.

**3.** On pose, pour tout entier naturel $n$ : $v_n = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}$.

**a)** Pour tout entier naturel $n$, exprimer $v_n$ en fonction de $u_n$.

**b)** En déduire, pour tout entier $n$ supérieur ou égal à 1, l'encadrement suivant :

$$2 \leqslant v_n \leqslant 2 + \frac{1}{n}.$$

**4.** Montrer par récurrence que, pour tout entier $n$ supérieur ou égal à 2, on a :

$$2(n+1) \leqslant \frac{1}{u_n} \leqslant 2(n+1) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}.$$

**5. a)** Pour tout entier $k$ supérieur ou égal à 2, comparer $\frac{1}{k}$ et $\displaystyle\int_{k-1}^{k} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$.

**b)** En déduire, pour tout $n$ supérieur ou égal à 2, l'inégalité suivante :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant 1 + \ln(n).$$

**6.** Utiliser les questions précédentes pour montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n = \frac{1}{2}$.

**Exercice 2.** La probabilité d'un événement $A$ est notée $\mathbf{P}(A)$, et pour tout événement $B$ tel que $\mathbf{P}(B) \neq 0$, on note $\mathbf{P}_B(A)$ la probabilité conditionnelle de $A$ sachant $B$.
On dispose de trois urnes numérotées 1, 2 et 3, qui contiennent chacune deux boules.

- L'urne numéro 1 contient deux boules blanches.
- L'urne numéro 2 contient une boule blanche et une boule rouge.
- L'urne numéro 3 contient deux boules rouges.

L'expérience consiste à choisir une fois pour toutes une urne « au hasard », puis à y effectuer une succession de tirages d'une boule *avec remise*, jusqu'à l'éventuelle apparition d'une boule blanche.
Pour tout entire $k$ compris entre 1 et 3, on note $U_k$ l'événement : « On choisit l'urne numéro $k$ ».
Par suite, on a $\mathbf{P}(U_1) = \mathbf{P}(U_2) = \mathbf{P}(U_3) = \frac{1}{3}$.
On considère la variable aléatoire $X$ égale au rang du tirage où apparaît pour la première fois une boule blanche. On attribue à $X$ la valeur 0 si l'on n'obtient jamais de boule blanche.

**1. a)** Déterminer l'ensemble des valeurs prises par $X$.

**b)** Justifier les résultats suivants : $\mathbf{P}_{U_1}([X=1]) = 1$, $\mathbf{P}_{U_2}([X=1]) = \frac{1}{2}$ et $\mathbf{P}_{U_3}([X=1]) = 0$.

**c)** En utilisant la formule des probabilités totales, établir la relation : $\mathbf{P}([X=1]) = \frac{1}{2}$.

**2. a)** Justifier que, pour tout entier $j$ supérieur ou égal à 2, on a : $\mathbf{P}_{U_1}([X=j]) = 0$ et $\mathbf{P}_{U_3}([X=j]) = 0$.

**b)** Calculer, pour tout entier $j$ supérieur ou égal à 2, $\mathbf{P}_{U_2}([X=j])$.

**c)** Montrer, pour tout entier $j$ supérieur ou égal à 2, la relation : $\mathbf{P}([X=j]) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^j$.

**3.** Utiliser les résultats précédents pour calculer $\mathbf{P}([X=0])$. Proposer une interprétation de ce dernier résultat.

**4.** On rappelle que, pour tout réel $x$ de $]0,1[$, on a : $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$.

**a)** Justifier l'existence de l'espérance mathématique $\mathbf{E}[X]$ de la variable aléatoire $X$.

**b)** Calculer $\mathbf{E}[X]$.