Devoir en temps libre

À rendre le lundi 20/01/2025

■ ■ ■

Exercice 1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère la fonction f_n définie pour tout réel x par $f_n(x) = x^n \mathrm{e}^{-x}$ et on note

$$I_n = \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

Calcul de l'intégrale I_1.
On considère g la fonction définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par $g(x) = \frac{x+1}{\mathrm{e}^x}$.

1. Calculer g' la dérivée de g.

2. En déduire que la fonction F_1 définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par $F_1(x) = -(x+1)\mathrm{e}^{-x}$ est une primitive de f_1.

3. Montrer que $I_1 = 1 - 2\,\mathrm{e}^{-1}$.

Étude de f_2.
Dans cette question, on s'intéresse à la fonction f_2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f_2(x) = x^2\,\mathrm{e}^{-x}$.

4. Déterminer les limites de f_2 en $-\infty$ et $+\infty$ en justifiant vos réponses.

5. Calculer la dérivée de f_2 et montrer qu'elle est donnée, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par

$$f_2'(x) = (2-x)x\,\mathrm{e}^{-x}.$$

6. Étudier le signe de f_2' et dresser le tableau de variations de f_2, en incluant les limites trouvées précédemment.

7. Démontrer que pour tout $x \geqslant 0$, on a $0 \leqslant f_2(x) \leqslant 4\,\mathrm{e}^{-2}$.

8. En déduire que $0 \leqslant I_2 \leqslant 4\,\mathrm{e}^{-2}$.

9. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $I_2 = -\mathrm{e}^{-1} + 2I_1$.

10. En déduire la valeur de I_2.

Étude de la suite (I_n).
On rappelle que par définition, on a $0! = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+1)! = (n+1) \times n!$; donc $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times (n-1) \times n$.

11. Calculer $I_0 = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.

12. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$I_{n+1} = -\mathrm{e}^{-1} + (n+1)I_n.$$

13. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{I_n}{n!} = 1 - \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right)\mathrm{e}^{-1}.$$

14. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Étudier les variations de f_n sur l'intervalle $[0,1]$.

15. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, 0 \leqslant I_n \leqslant \mathrm{e}^{-1}$.

16. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.