



Exercice 1. On effectue une succession de lancers (supposés indépendants d'une pièce de monnaie équilibrée pour laquelle la probabilité d'obtenir « pile » vaut $\frac{1}{2}$ et celle d'obtenir « face » vaut également $\frac{1}{2}$). On considère la variable aléatoire X , égale au rang d'apparition du premier « pile » et la variable aléatoire Y , égale au rang d'apparition du premier « face ».

1. Donner la loi commune à X et Y , ainsi que les valeurs de l'espérance et de la variance de la variable aléatoire X .
2. Que vaut $\mathbf{P}([X = 1] \cap [Y = 1])$? En déduire que X et Y ne sont pas indépendantes.
3. a) Montrer que, pour tout entier j supérieur ou égal à 2, $\mathbf{P}([X = 1] \cap [Y = j]) = \mathbf{P}(Y = j)$.
b) Montrer que, pour tout entier i supérieur ou égal à 2, $\mathbf{P}([X = i] \cap [Y = 1]) = \mathbf{P}(X = i)$.
c) En déduire la loi de la variable aléatoire XY . On précisera $XY(\Omega)$.
d) Montrer que l'espérance de XY existe, puis donner sa valeur.
e) Calculer la covariance de X et Y . En déduire que la variance de $X + Y$ est égale à 2.
4. a) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire $X + Y$. On précisera $(X + Y)(\Omega)$.
b) Montrer que les variables aléatoires $X + Y$ et $XY + 1$ sont de même loi.
5. On décide de coder « pile » par 1 et « face » par 0.
Compléter le script suivant afin qu'il permette le calcul et l'affichage des valeurs prises par les variables aléatoires X et Y lors de l'expérience réalisée dans cet exercice.

```
import numpy.random as rd
x = ...
y = ...
lancer = rd.randint(0, 2)
if lancer == 1:
    while lancer == 1:
        lancer = rd.randint(0, 2)
        y = ...
else:
    while lancer == 0:
        lancer = rd.randint(0, 2)
        x = ...
print(x)
print(y)
```